

**АЛЬБОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ, ОРИЕНТИРОВАННЫХ  
НА СОВМЕСТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗЫ  
НОРМАЛЬНОГО ИЛИ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
ДАННЫХ МАЛЫХ ВЫБОРОК**

**Авторы**

Aleksey P. Ivanov, Polytechnic Institute, Penza State University, Russia, e-mail:  
tsib@pnzgu.ru

Aleksandr I. Ivanov, Penza Research Institute of Electrical Engineering, Russia, e-  
mail: bio.ivan.penza@mail.ru

Aleksandr V. Bezyaev, Polytechnic Institute, Penza State University, Russia, e-  
mail: tsib@pnzgu.ru

Evgeniy N. Kupriyanov, Polytechnic Institute, Penza State University, Russia, e-  
mail: tsib@pnzgu.ru

Andrey G. Bannykh, Polytechnic Institute, Penza State University, Russia, e-mail:  
tsib@pnzgu.ru

Konstantin A. Perfilov, Polytechnic Institute, Penza State University, Russia, e-  
mail: tsib@pnzgu.ru

Vitaliy S. Lukin, Faculty of Information Technologies and Electronics, Russia, e-  
mail: ibst@pnzgu.ru

Konstantin N. Savinov, Polytechnic Institute, Penza State University, Russia, e-  
mail: tsib@pnzgu.ru

Svetlana A. Polkovnikova, Faculty of Computer Engineering, Penza State  
University, Russia, e-mail: vt@pnzgu.ru

Yuliya I. Serikova, Polytechnic Institute, Penza State University, Russia, e-mail:  
tsib@pnzgu.ru

**Аннотация.**

*Рассматривается проблема параллельного использования множества  
статистических критериев, ориентированных на проверку той или иной*

*статистической гипотезы. Как правило, на малых выборках в 16 опытов статистические критерии дают высокое значение вероятностей ошибок первого и второго рода. Однако если каждому из статистических критериев построить эквивалентный искусственный нейрон и объединить их в большую сеть искусственных нейронов, то мы получим длинный код с высокой избыточностью. Свертывание избыточности таких кодов позволяет корректировать ошибки некоторых статистических критериев. В работе приведены функциональные зависимости и пороги, используемые при программной реализации 18 базовых критериев или эквивалентных им искусственных нейронов. Из 18 базовых критериев могут быть собраны до 160 новых, слабо изученных критериев, полученных мультипликативным парным объединением. Мультипликативное объединение троек базовых критериев может дать порядка 800 новых перспективных статистических критериев и эквивалентных им искусственных нейронов.*

**Ключевые слова.**

*Классические и новые статистические критерии, искусственные нейроны эквивалентные статистическим критериям, параллельный статистический анализ малых выборок, корректировка ошибок выходного кода нейросети.*

**ALBUM OF STATISTICAL CRITERIA ORIENTED TO JOINT USE IN  
CHECKING THE HYPOTHESIS OF NORMAL OR UNIFORM  
DISTRIBUTION OF DATA IN SMALL SAMPLES**

**Authors**

Aleksey P. Ivanov, Polytechnic Institute, Penza State University, Russia, e-mail: tsib@pnzgu.ru

Aleksandr I. Ivanov, Penza Research Institute of Electrical Engineering, Russia, e-mail: bio.ivan.penza@mail.ru

Aleksandr V. Bezyaev, Polytechnic Institute, Penza State University, Russia, e-mail: tsib@pnzgu.ru

Evgeniy N. Kupriyanov, Polytechnic Institute, Penza State University, Russia, e-mail: tsib@pnzgu.ru

Andrey G. Bannykh, Polytechnic Institute, Penza State University, Russia, e-mail: tsib@pnzgu.ru

Konstantin A. Perfilov, Polytechnic Institute, Penza State University, Russia, e-mail: tsib@pnzgu.ru

Vitaliy S. Lukin, Faculty of Information Technologies and Electronics, Russia, e-mail: ibst@pnzgu.ru

Konstantin N. Savinov, Polytechnic Institute, Penza State University, Russia, e-mail: tsib@pnzgu.ru

Svetlana A. Polkovnikova, Faculty of Computer Engineering, Penza State University, Russia, e-mail: vt@pnzgu.ru

Yuliya I. Serikova, Polytechnic Institute, Penza State University, Russia, e-mail: tsib@pnzgu.ru

### **Annotation.**

*The problem of parallel use of a set of statistical criteria aimed at testing one or another statistical hypothesis is considered. As a rule, on small samples of 16 experiments, statistical tests give a high value of the probabilities of errors of the first and second kind. However, if we build an equivalent artificial neuron for each of the statistical criteria and combine them into a large network of artificial neurons, then we will get a long code with high redundancy. The reduction of the redundancy of such codes makes it possible to correct the errors of some statistical tests. The paper presents functional dependencies and thresholds used in the software implementation of 18 basic criteria or artificial neurons equivalent to them. From 18 basic criteria, up to 160 new, poorly studied criteria can be collected, obtained by multiplicative pairwise union. A multiplicative union of*

*triples of basic criteria can give about 800 new promising statistical criteria and artificial neurons equivalent to them.*

**Keywords.**

*Classical and new statistical criteria, artificial neurons equivalent to statistical criteria, parallel statistical analysis of small samples, correction of errors in the output code of the neural network.*

**1. КЛАССИЧЕСКИЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ, СОЗДАННЫЕ В 20 ВЕКЕ**

В начале 20 века в 1900 году Пирсон создал хи-квадрат критерий [1, 2] во многом, определивший идеологию развития математической статистики. К сожалению, хи-квадрат критерий плохо работает при малых выборках в 16 опытов. Ниже на рисунке 1 приведена программа, соответствующая нейросетевому эквиваленту хи-квадрат критерия Пирсона и даны плотности распределения значений его выходных состояний.

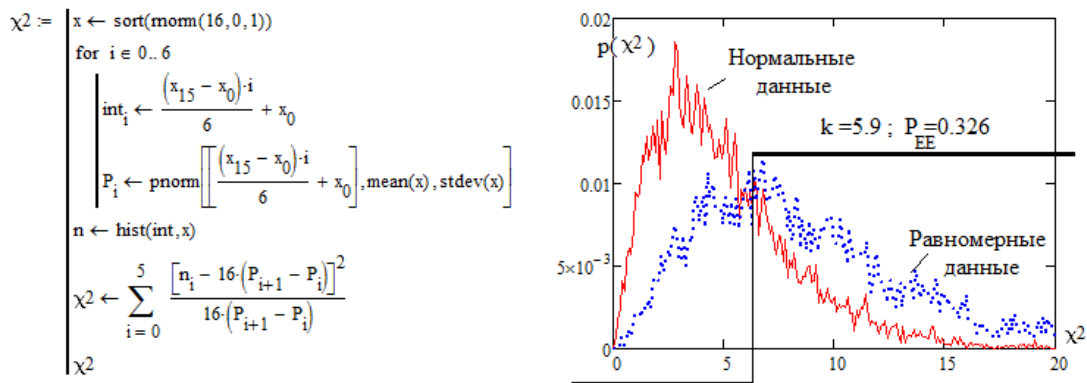


Рис. 1. Программная реализация хи-квадрат нейрона на языке MathCAD и графики его выходных состояний

В случае если порог выходного квантователя хи-квадрат нейрона принять  $k=5.9$ , то возникает ситуация совпадения ошибок первого и второго рода  $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.326$ , что не позволяет в одиночку использовать этот статистический критерий на практике.

После критерия Пирсона был создан ряд иных параметрических критериев, широко применяемых на практике [3]. В частности, в 1928 году [2] был создан статистический критерий Крамера-фон Мизеса (KfM). Фрагмент его программной реализации и, соответствующие, плотности распределения состояний нейрона KfM иллюстрируются рисунком 2.

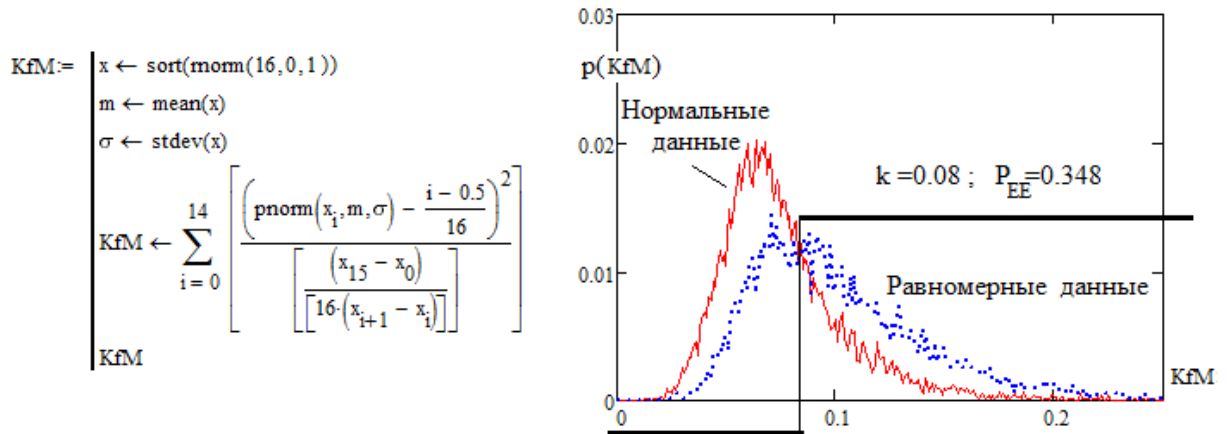


Рис. 2. Нейрон эквивалентный критерию Крамера-фон Мизеса

Из рисунка 2 видно, что нейрон KfM по вероятностям ошибок первого и второго рода примерно на 7% оказывается хуже нейрона хи-квадрат критерия Пирсона (см. рис. 1). Улучшить этот показатель удалось только в 1936 году в результате, соответствующей, модификации статистического критерия Смирнова [2]. Модифицированный критерий Смирнова-Крамера-фон Мизеса (SKfM) иллюстрируется данными рисунка 3.

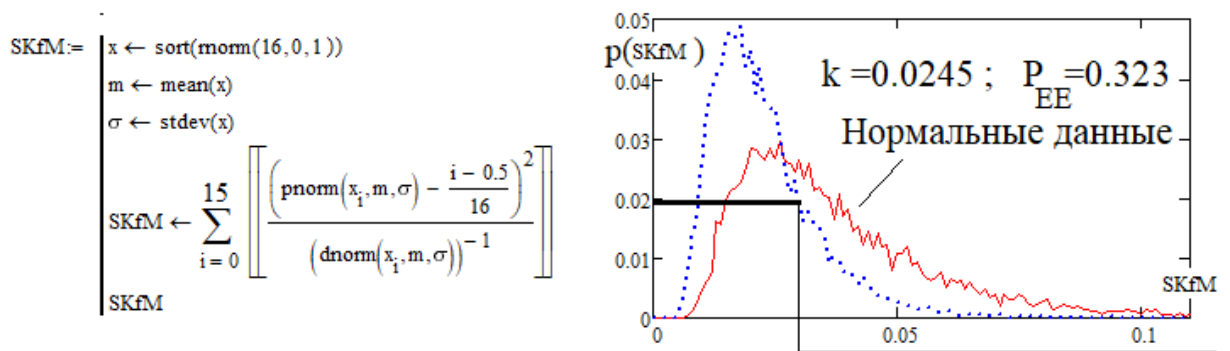


Рис. 3. Нейрон эквивалентный критерию Смирнова-Крамера-фон Мизеса

Следующий значимый шаг в развитии теории был сделан Андерсоном и Дарлинггом в 1952 году [2]. Программная реализация искусственного нейрона Андерсона-Дарлингга (AD) и статистики его выходных состояний

для малых выборок с нормальным и равномерным распределением данных отображены на рисунке 4.

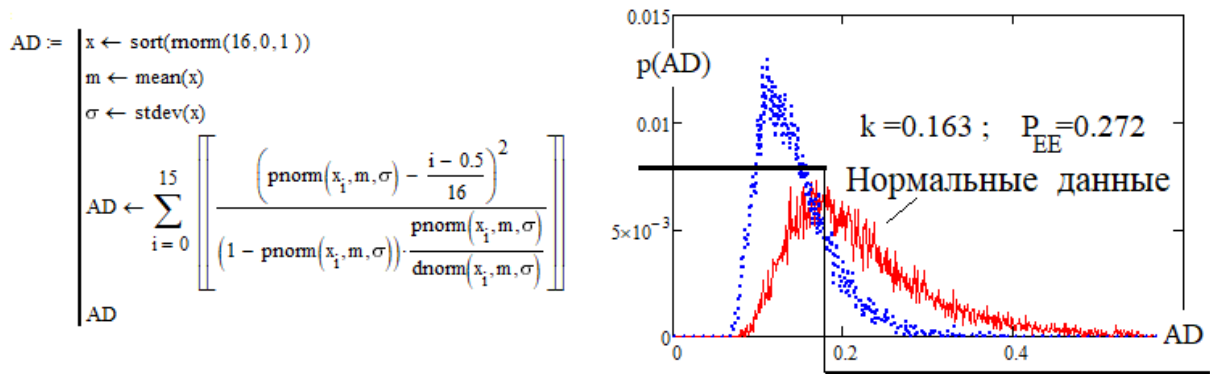


Рис. 4. Нейрон эквивалентный статистическому критерию Андерсона-Дарлинга

Через два года Дэвид, Хартли и Пирсон показали возможность применения критерия, построенного на учете размаха данных, нормированного стандартным отклонением [2] (см. рис. 5).

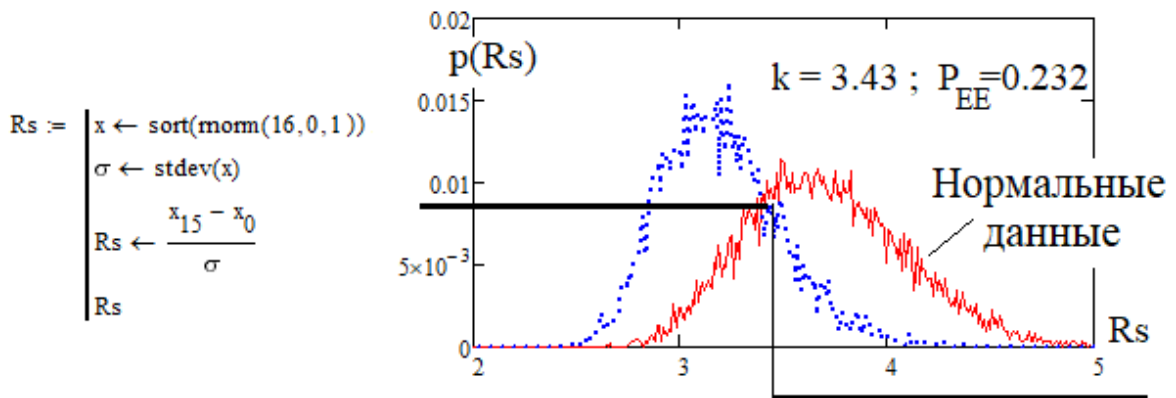


Рис. 5. Нейрон эквивалентный статистическому критерию нормированного размаха

Заметный вклад в исследования внесли Шапиро и Уилк, опубликовавшие свой вариант критерия в 1965 году [2] (см. рис. 6).

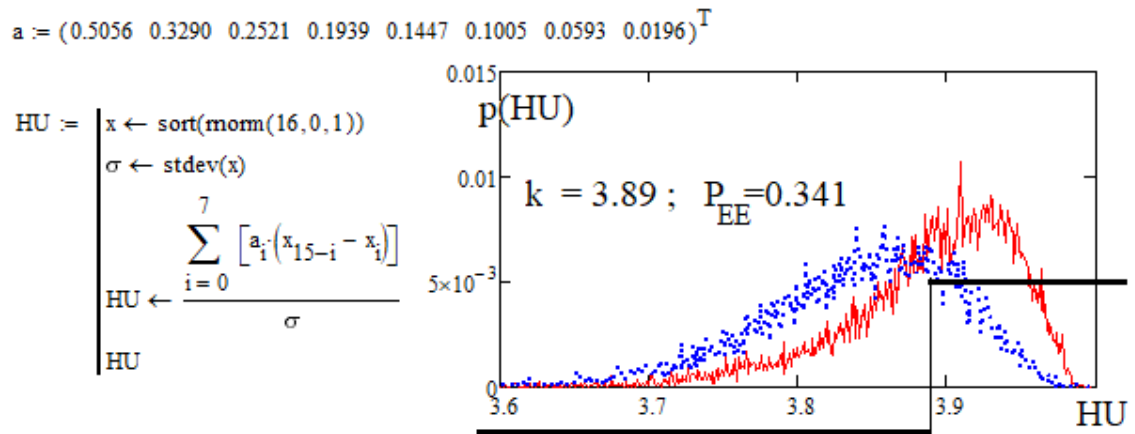


Рис. 6. Нейрон эквивалентный статистическому критерию Шапиро-Уилка

Одной из лучших математических конструкций, синтезированных в прошлом веке, оказался критерий Васичека (см. рис. 7).

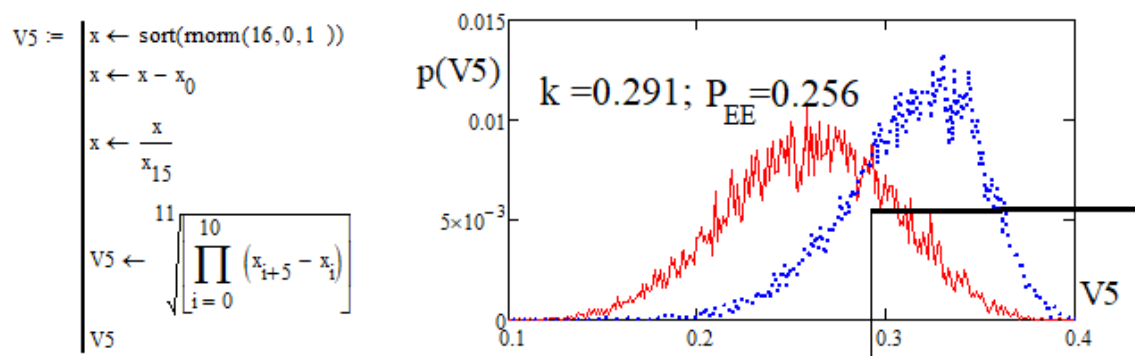


Рис. 7. Нейрон эквивалентный статистическому критерию Васичека 1976 г.

Исследования, выполненные Фроцини в 1978 году, показали, что численное моделирование критерия Андерсона-Дарлинга может быть упрощено. При этом наблюдается даже некоторый рост мощности упрощенного критерия Фроцини (Fr) (см. рис. 8).

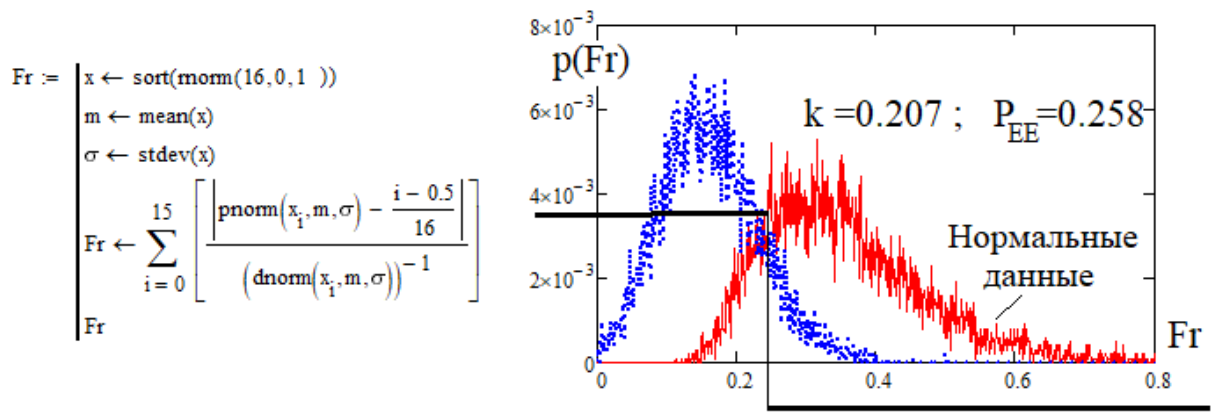


Рис. 8. Нейрон эквивалентный статистическому критерию Фрочкини

При решении задачи разделения малых выборок нормально и равномерно распределенных данных хорошие результаты дает критерий четвертого статистического момента, что было показано Анскомбе и Глумом в 1983 году [2] (см. рис. 9).

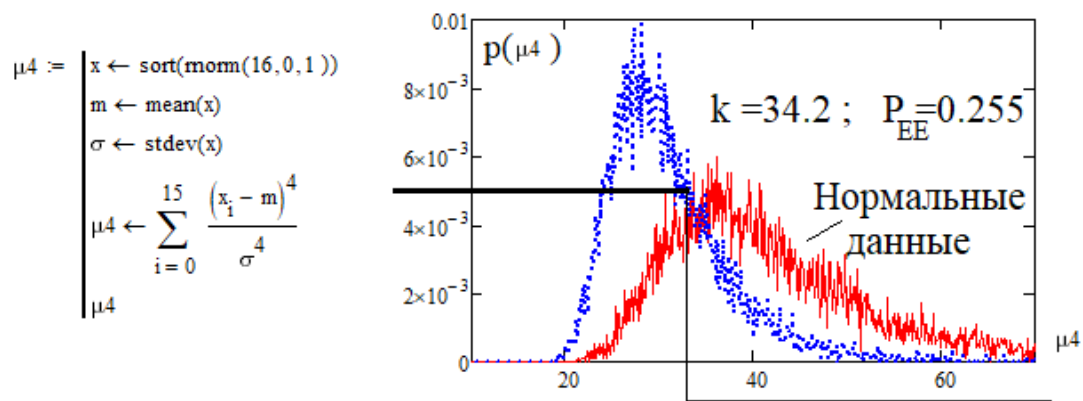


Рис. 9. Нейрон эквивалентный статистическому критерию четвертого статистического момента

Таким образом, мы получили коллекцию из 9 статистических критериев. Использование каждого из этих статистических критериев отдельно не дает хороших результатов при анализе малых выборок в 16 опытов. Сборка нейросети из 9 искусственных нейронов может дать значительные улучшения только в случае, если выходные разряды кода с 9-ти кратной избыточностью будут существенно независимы. Это действительно так, что отображено в таблице 1.



Таблица 1 - Вероятности ошибок и коэффициенты парной корреляции между классическими статистическими критериями

$P_1 = P_2 = P_{EE}$		Для малой выборки в 16 опытов								
		1900	1928	1936	1952	1954	1965	1976	1978	1984
		$\chi^2$	KfM	SKfM	AD	Rs	HU	V5	Fr	$\mu^4$
0.326	$\chi^2$	1	0.562	0.352	0.466	-0.402	-0.678	0.184	0.248	-0.087
0.348	KfM		1	0.485	0.581	-0.339	-0.662	0.088	0.402	-0.08
0.323	SKfM			1	0.951	0.015	-0.502	-0.212	0.931	0.19
0.272	AD				1	-0.102	-0.597	-0.12	0.917	0.113
0.232	Rs					1	0.141	-0.919	0.064	0.829
0.341	HU						1	0.146	-0.374	-0.355
0.256	V5							1	-0.21	-0.876
0.258	Fr								1	0.195
0.255	$\mu^4$									1

Зная вероятности ошибок по каждому нейрону, мы можем вычислить

их среднее геометрическое  $\sqrt[9]{0.326 \cdot 0.348 \cdot 0.323 \cdot 0.272 \cdot 0.232 \cdot 0.341 \cdot 0.256 \cdot 0.258 \cdot 0.255} = 0.287$ . Если

бы корреляционные связи отсутствовали, то 9-ти кратная избыточность кода должна приводить к снижению вероятности ошибок примерно в три раза до величины 0.096. Для учета влияния реальных корреляционных связей необходимо вычислить средний модуль коэффициентов парных корреляций. В нашем случае он составит  $E(|r|) = 0.399$  [4]. Из-за столь высокого среднего значения модулей коэффициентов корреляции, в место, трехкратного снижения вероятностей ошибок, наблюдается только 30% их снижение.

## 2. НОВЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ, СОЗДАННЫЕ В НАЧАЛЕ 21 ВЕКА

В прошлом веке было создано порядка 20-ти статистических критериев, ориентированных на проверку гипотезы нормального распределения данных и примерно столько же критериев для проверки гипотезы равномерного распределения данных. Из-за сильной

корреляционной сцепленности всех этих критериев между собой  $E(|r|)=0.399$  сети из 40 искусственных нейронов с вероятностями ошибок  $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.287$  оказывается недостаточно, чтобы обеспечить уровень вероятности ошибок, необходимый для практики. В связи с этим в начале 21-го века возник ренессанс интереса к синтезу новых статистических критериев, ориентированных на совместное использование в нейросетевых обобщениях [5, 6, 7, 8].

Первым убедительным успехом в этом направлении являются исследования критерия суммы квадратов среднего геометрического плотности распределения и функции вероятности данных малых выборок [9, 10, 11, 12]. Программная реализация этого критерия и вероятности выходных состояний его эквивалентного нейрона приведены на рисунке 10.

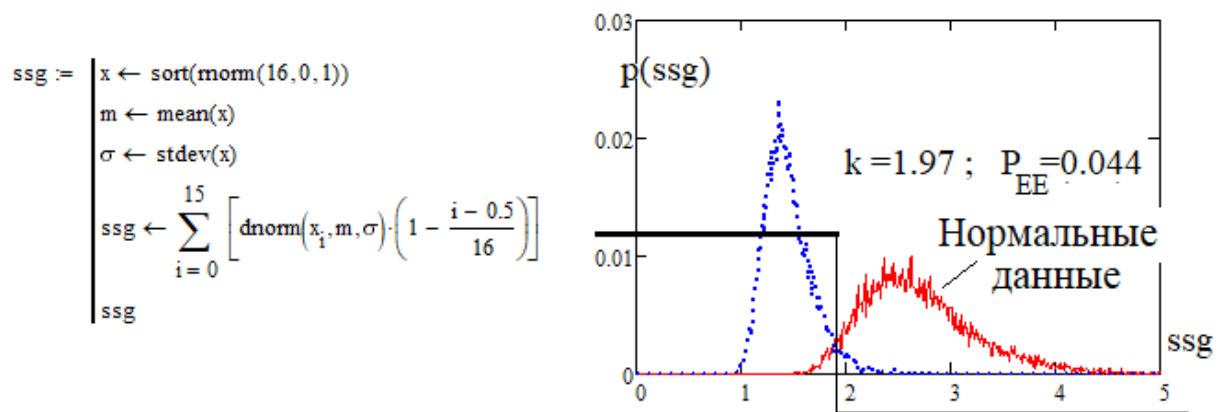


Рис. 10. Новый статистический критерий, показавший в 2014 году рекордную мощность по отношению к классическим статистическим критериям

Из данных рисунка 10 следует, что вероятности ошибок нового нейрона  $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.044$  снизились более чем в 5 раз по отношению к аналогичным данным рисунка 5 наиболее мощного классического критерия.

Отмеченное выше преимущество исчезает, если перейти к прямому вычислению показателя среднего геометрического малой выборки [13, 14] (см. рис. 11).

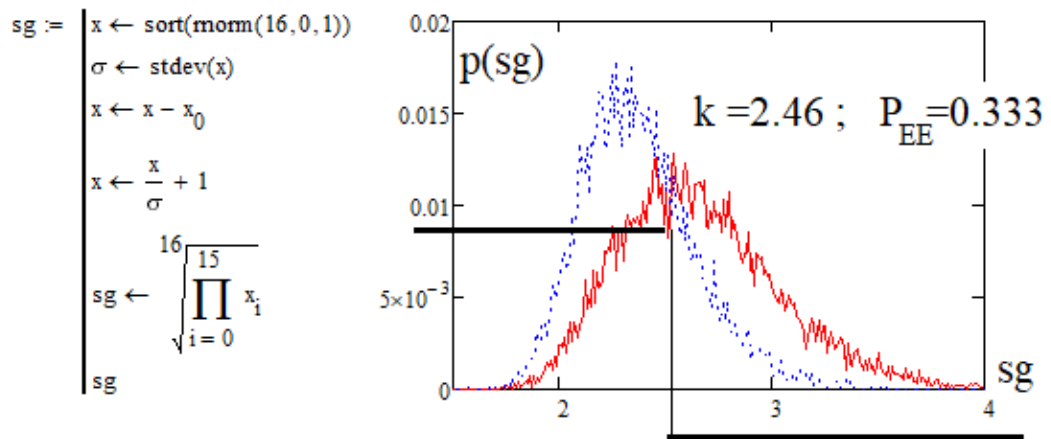


Рис. 11 Критерий среднего геометрического данных малой выборки

Очевидным является то, что наряду с использованием на практике критериев среднего геометрического [13, 14] мы имеем возможность обрабатывать данные в пространстве среднего гармонического [15, 16, 17]. Программа для воспроизведения нейрона среднего гармонического и плотности вероятности его выходных состояний для нормальных и равномерно распределенных данных приведены на рисунке 12.

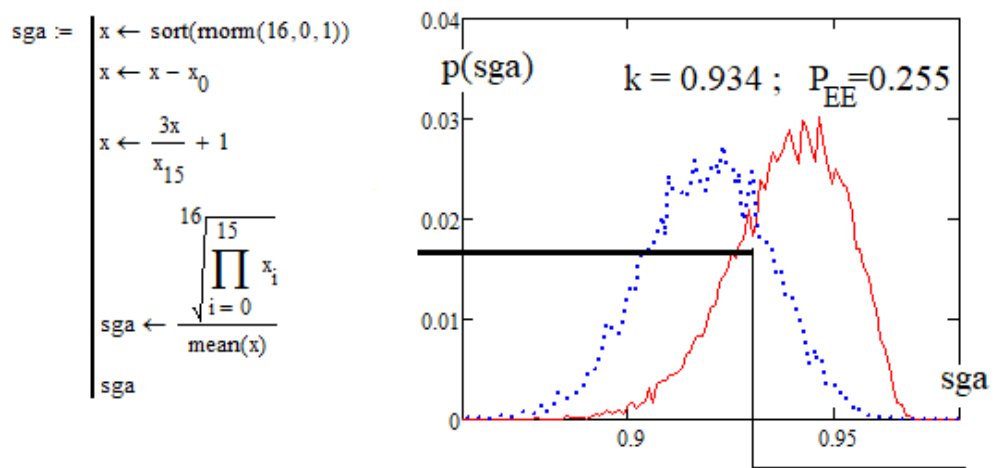


Рис. 12 Нейрон с накоплением данных в пространстве среднего гармонического

Следует отметить, что, наряду с классическим критерием Крамера-фон Мизеса, мы можем использовать его дифференциальный аналог [18, 19, 20]. При этом мы наблюдаем скачек мощности нового критерия до  $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.039$ , что примерно в 9 раз лучше по сравнению с его классическим аналогом (см. рис. 13).

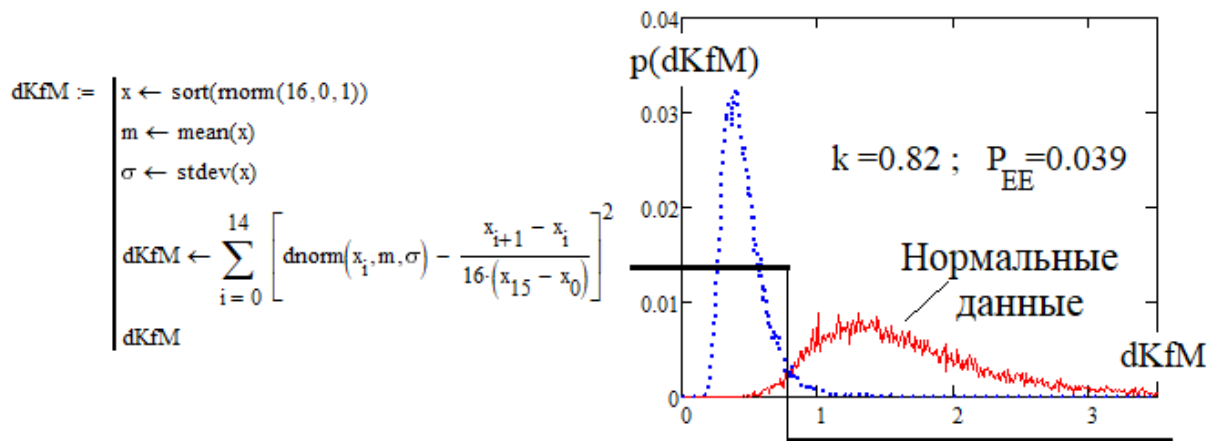


Рис. 13. Нейрон дифференциального аналога критерия Крамера-фон Мизеса 2016 г.

Аналогичная ситуация возникает и при переходе к использованию дифференциального аналога классического критерия Смирнова-Крамера-фон Мизеса (см. рис. 14), критерия Андерсона-Дарлинга (см. рис. 15), критерия Фроцини (см. рис. 16).

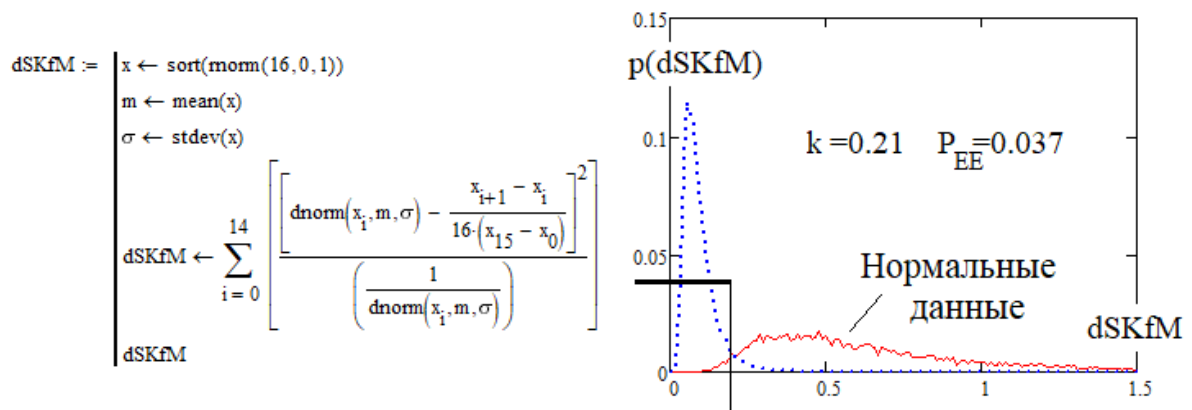


Рис. 14. Нейрон дифференциального аналога классического критерия Смирнова-Крамера-фон Мизеса 2016 г.

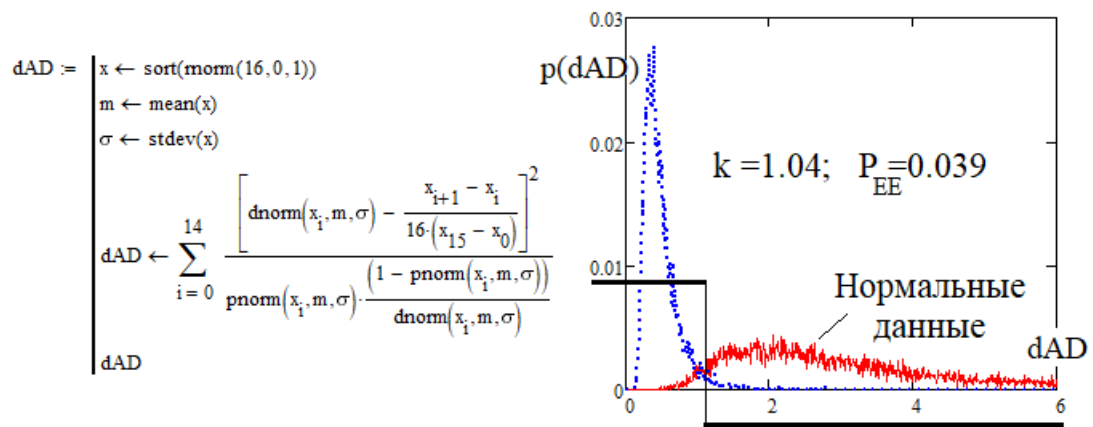


Рис. 15. Нейрон дифференциального аналога критерия Андерсона-Дарлинга 2016 г.

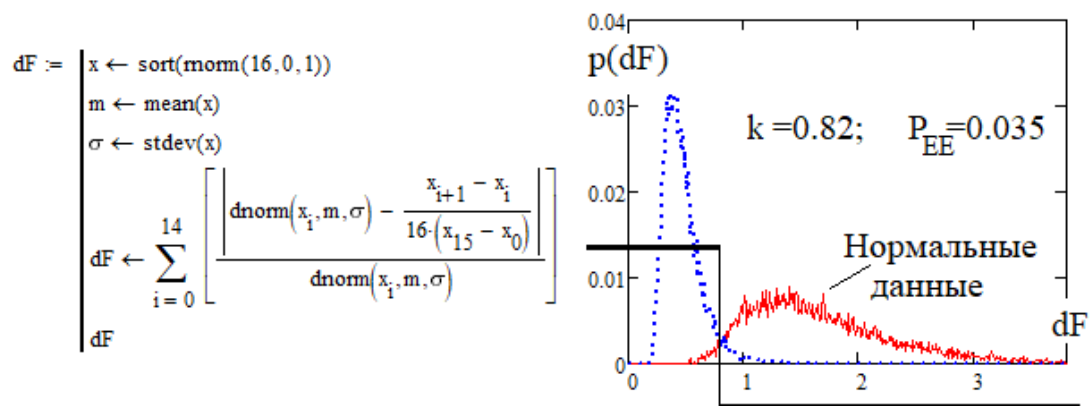


Рис. 16. Нейрон дифференциального аналога критерия Фроцини 2016 г.

Продолжение исследований позволило в 2020 году получить новый статистический критерий «суммы хвостов» [6] (см. рис. 17). Этот критерий построен на том, что вероятность наблюдения значительных «хвостов» нормально распределенных данных существенно меньше в сравнении с равномерно распределенными данными.

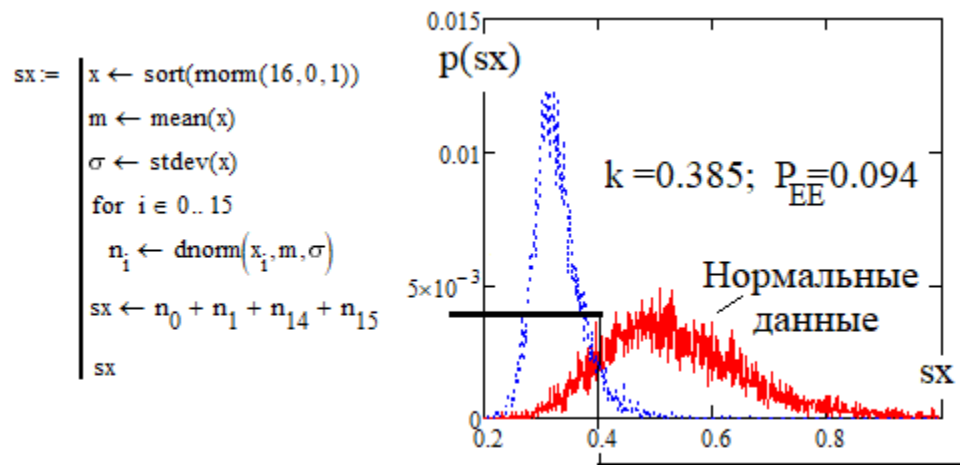


Рис. 17. Нейрон эквивалентный критерию «суммы хвостов» 2020 г.

Еще одним вариантом синтеза нового статистического критерия выполняется через простые дифференцирования случайных входных данных малой выборки [21] (см. рис. 18).

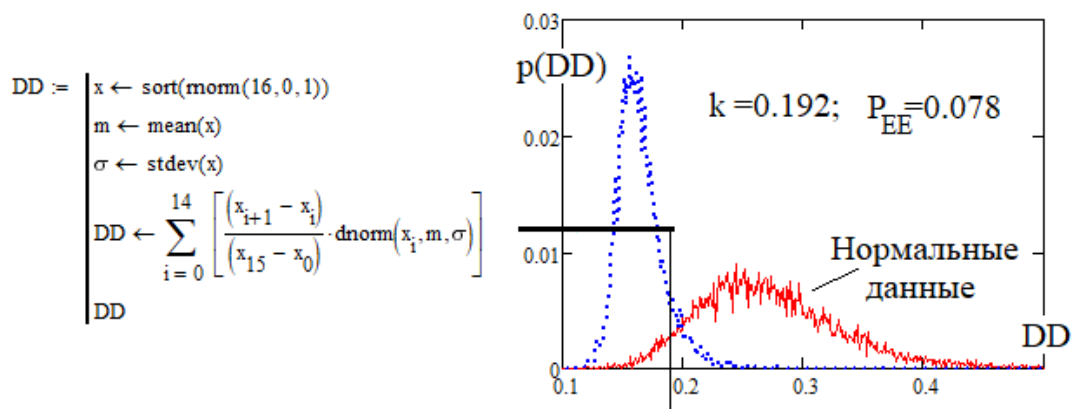


Рис. 18. Нейрон эквивалентный критерию дифференциала входных данных 2021 г.

Таким образом, мы имеем существенный рост числа созданных в начале нынешнего века статистических критериев. Наблюдается рост мощности новых статистических критериев.

Таблица 2 - Мощность новых статистических критериев и коэффициенты парной корреляции между ними.

$P_1 = P_2 = P_{EE}$		2014	2014	2016	2016	2016	2016	2017	2020	2021
		ssg	sg	dKfM	dSKfM	dAD	dF	sga	sx	DD
0.044	ssg	1	0.053	0.978	0.916	0.917	0.978	0.13	0.769	0.833
0.333	sg		1	0.092	0.073	0.05	0.089	0.813	-0.054	-0.411
0.039	dKfM			1	0.975	0.973	1	0.147	0.733	0.806
0.037	dSKfM				1	0.997	0.975	0.114	0.684	0.766
0.039	dAD					1	0.973	0.081	0.716	0.79
0.035	dF						1	0.145	0.734	0.807
0.255	sga							1	-0.134	-0.352
0.094	sx								1	0.754
0.078	DD									1

Следует отметить, что среднее геометрическое значение вероятностей ошибок первого и второго рода для новых статистических критериев составляет величину  $\sqrt[9]{0.044 \cdot 0.333 \cdot 0.039 \cdot 0.037 \cdot 0.039 \cdot 0.035 \cdot 0.255 \cdot 0.094 \cdot 0.078} = 0.072$ . Этот показатель примерно в четыре раза лучше, в сравнении с аналогичным показателем классических статистических критериев прошлого века. При этом среднее значение модулей коэффициентов парной корреляции новых статистических критериев увеличивается до значения  $E(|r|) = 0.578$ , что хуже, чем этот же показатель у классических статистических критериев.

### 3. НОВЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ, ПОЛУЧЕННЫЕ ПЕРЕМНОЖЕНИЕМ/ДЕЛЕНИЕМ ОТКЛИКОВ ИЗВЕСТНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

В связи с тем, что в прошлом веке было создано порядка 21 статистического критерия [2] проверки гипотезы нормального распределения и примерно столько же статистических критериев проверки гипотезы

равномерного распределения, мы можем создать нейросеть из 42 статистических критериев [6, 7, 8]. Эта математическая конструкция иллюстрируется рисунком 19.

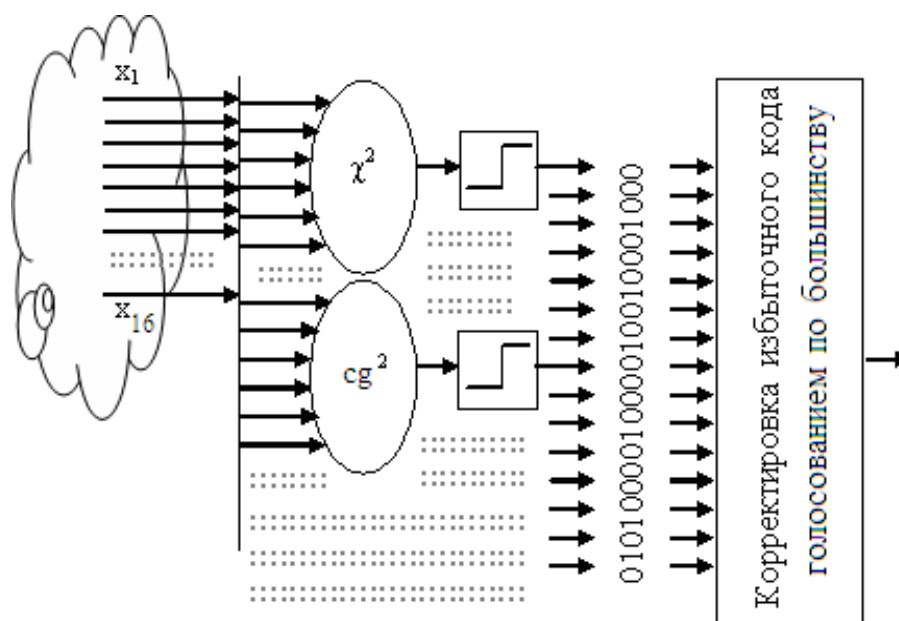


Рис. 19. Параллельная обработка малой выборки в 16 опытов несколькими искусственными нейронами эквивалентными хи-квадрат критерию и иным известным статистическим критериям проверки той или иной гипотезы

Если принять во внимание 9 статистических критериев, синтезированных в этом веке, то число искусственных нейронов удастся увеличить до 51. При этом на выходах нейросети мы будем получать код с длиннее в 51 раз, чем нужно. Столь значительная избыточность выходного кода может быть использована для обнаружения и исправления ошибок в нем [22, 23]. Математические конструкции, обнаруживающие и исправляющие ошибки в длинных кодах могут быть построенные по-разному. Самыми простыми являются коды, построенные на простом подсчете состояний «0» и «1» во всех разрядах. Итоговое решение принимается по большинству, обнаруженных в коде состояний.

Очевидным является то, что монотонный рост избыточности подобных кодовых конструкций всегда приводит к монотонному росту качества, принимаемых нейросетью решений. То есть необходимо формализовать синтез достаточно большого числа новых статистических



критериев, так как их синтез через эвристику малопродуктивен. Усилиями авторов этой статьи (10 человек) удалось синтезировать 9 достаточно эффективных критериев за 10 лет. При таких темпах синтеза новых критериев может потребоваться порядка 200 лет работы для получения избыточных выходных кодов длиной в 256 бит.

Как показали наши исследования, новые статистические критерии могут быть синтезированы путем перемножения выходных состояний уже известных статистических критериев. В частности, может быть использовано произведение критерия Смирнова-Крамера-фон Мизеса и критерия нормированного размаха. Программная реализация для численного эксперимента и выходные состояния модифицированного критерия SKfM приведены на рисунке 20.

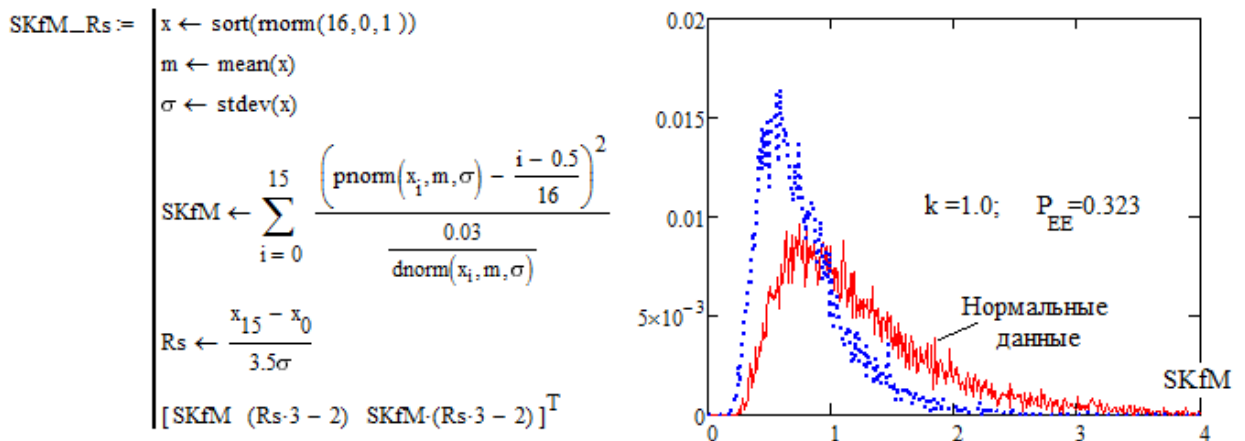


Рис. 20 - Программное обеспечение мультипликативного объединения двух критериев (левая часть рисунка) и модифицированный критерий Смирнова-Крамера-фон Мизеса

Модификация исходного критерия SKfM, выполнена таким образом, чтобы точка равновероятных ошибок первого и второго рода  $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.323$  была смещена под выполнение условия:  $k=1.0$ . Мультипликативный способ обеспечивает сжатие, разделяемых данных, лежащих до точки квантования:  $k=1.0$ . При этом данные больше единицы подвергаются растяжению. В точке  $SKfM=1.0$  отсутствует как деформация сжатия пространства, так и деформация его растяжения.

На рисунке 21 приведены выходные состояния модифицированного критерия нормированного размаха и статистики итогового мультипликативного объединения двух, рассматриваемых критериев.

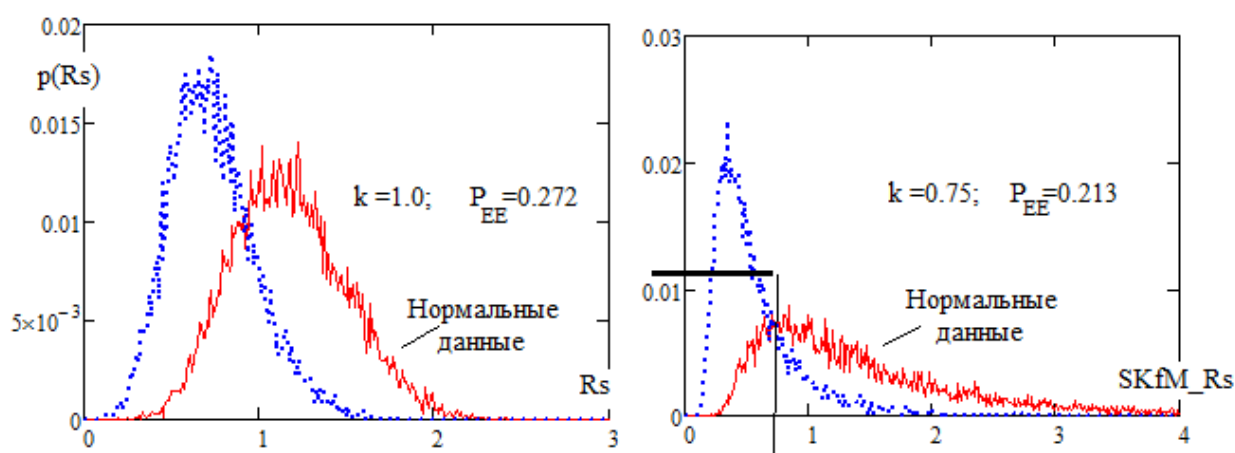


Рис. 21 - Мультипликативного объединения двух критериев (левая часть рисунка –это модифицированный критерий размаха) результат мультипликативного объединения двух критериев дан в правой части рисунка

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нам удалось мультипликативно объединить два известных ранее статистических критерия. При этом вероятности ошибок синтезированного критерия  $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.213$  оказывается примерно на 28% меньше, чем у лучшего критерия в использованной паре. Если ориентироваться на, приведенные в этой работе 18 статистических критериев, то мы можем получить из них примерно 160 новых вариантов перспективных статистических критериев. Если же мы воспользуемся мультипликативным объединением троек не повторяющихся сочетаний 18-ти критериев, то можем получить порядка 800 новых, еще не изученных статистических критериев. В этом отношении получить нейросетевое объединение нескольких сотен новых статистических критериев следует рассматривать как вполне решаемую техническую задачу.

## Список использованных источников

1. Р 50.1.037-2002 Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть I. Критерии типа  $\chi^2$ . - М.: Госстандарт России, 2001. - 140 с.
2. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 816 с.
3. Р 50.1.037-2002 Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии. - М.: Госстандарт России, 2002. - 123 с.
4. Иванов, А. И. Учет влияния корреляционных связей через их усреднение по модулю при нейросетевом обобщении статистических критериев для малых выборок / А. И. Иванов, А. Г. Банных, Ю. И. Серикова // Надежность. 2020. № 2. С. 28-34. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2020-20-2-28-34>
5. Иванов, А. И. Коллекция искусственных нейронов, эквивалентных статистическим критериям, для их совместного применения при проверке гипотезы нормальности малых выборок биометрических данных / А. И. Иванов, А. Г. Банных, Е. Н. Куприянов, В. С. Лукин, К. А. Перфилов, К. Н. Савинов // Безопасность информационных технологий : тр. I Всерос. науч.-техн. конф. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2019. – С. 163–172.
6. Иванов А.И. Искусственные математические молекулы: повышение точности статистических оценок на малых выборках (программы на языке MathCAD) : препринт. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. – 36 с.
7. Иванов, А.И. Нейросетевое обобщение классических статистических критериев для обработки малых выборок биометрических данных / А.И. Иванов, Е.Н.Куприянов, С.В. Туреев // Надежность. 2019. № 2. С 22-27. DOI: 10.21683/1729-2646-2019-19-2-22-27

8. Иванов, А. И. Искусственные молекулы, собранные из искусственных нейронов, воспроизводящих работу классических статистических критериев / А. И. Иванов, А. Г. Банных, А. В. Безяев // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. № 1 (48), С. 26–32. DOI: 10.17072/1993-0550-2020-1-26-32.

9. Перфилов К.А. Критерий среднего геометрического, используемый для проверки достоверности статистических гипотез распределения биометрических данных. Труды научно-технической конференции кластера пензенских предприятий, обеспечивающих безопасность информационных технологий. Том 9, Пенза-2014, С. 92-93 (<http://www.pniei.penza.ru/RV-conf/T9/C92>)

10. Перфилов К.А., Иванов А.И., Проценко Е.Д. Расширение многообразия статистических критериев, используемых при проверке гипотез распределения значений биометрических данных. //Европейский союз ученых, № 13, 29-30.04.2015, часть 5, С. 9-12.

11. Иванов А.И., Перфилов К.А., Малыгина Е.А. Многомерный статистический анализ качества биометрических данных на предельно малых выборках с использованием критериев среднего геометрического, вычисленного для анализируемых функций вероятности // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. Пенза. №2 (16) 2016. С. 58-66.

12. Иванов А.И., Перфилов К.А., Малыгина Е.А. Оценка качества малых выборок биометрических данных с использованием дифференциального варианта статистического критерия среднего геометрического // Вестник СИБГАУ, №4 (17) 2016. –С. 864-871

13. Иванов А.И., Перфилов К.А., Лукин В.С. Нейросетевое обобщение семейства статистических критериев среднего геометрического и среднего гармонического для прецизионного анализа малых выборок биометрических данных. // Сборник научных ст. Всероссийской научно-технической конференции «Информационно-управляющие телекоммуникационные

системы, средства поражения и их техническое обеспечение» / под общ. ред. В. С. Безяева. – Пенза: АО НПП "Рубин", 2019. – С.50-63.

14. Волчихин В.И., Иванов А.И., Перфилов К.А., Малыгина Е.А., Серикова Ю.И. Быстрый алгоритм обучения сетей искусственных нейронов квадрата среднего геометрического плотностей распределения значений многомерных биометрических данных. // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2018. № 3 (47). –С. 23-35.

15. Иванов А.И., Перфилов К.А, Лукин В.С. Нейросетевое обобщение семейства статистических критериев среднего геометрического и среднего гармонического для прецизионного анализа малых выборок биометрических данных. // Сборник научных ст. Всероссийской научно-технической конференции «Информационно-управляющие телекоммуникационные системы, средства поражения и их техническое обеспечение» / под общ. ред. В. С. Безяева. – Пенза: АО «НПП "Рубин".– 2019.– С.50-63.

16. Лукин В.С. Сравнение мощности обычной и логарифмической форм статистических критериев среднего гармонического при использовании для проверки гипотезы нормального распределения данных малой выборки // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки, №4, 2020– С. 19-26.

17. Лукин В.С., Иванов А.И. Доверенный искусственный интеллект, построенный с использованием нейронов среднего гармонического // Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века. //Сборник статей VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Пермь, 21–22 октября 2021 г. – С.441-445.

18. Иванов А.И. Многомерная нейросетевая обработка биометрических данных с программным воспроизведением эффектов квантовой суперпозиции. Издательство АО «ПНИЭИ», Пенза-2016 г., 133 с.  
<http://пниэи.рф/activity/science/BOOK16.pdf>

19. Волчихин В.И., Иванов А.И., Перфилов К.А., Малыгина Е.А., Серикова Ю.И. Быстрый алгоритм обучения сетей искусственных нейронов квадрата среднего геометрического плотностей распределения значений многомерных биометрических данных. // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2018. № 3 (47). С. 23-35.

20. Перфилов К. А., Газин А. И. Оценка соотношения мощностей хи-квадрат нейрона и нейрона среднего геометрического при их использовании в преобразователях биометрия-код / Сборник научных статей по материалам I Всероссийской научно-технической конференции «Безопасность информационных технологий», Пенза.– 2019, С. 112-122.

21. Иванов А. И., Малыгин А. Ю., Полковникова С. А. Новый статистический критерий большой мощности, полученный дифференцированием случайных данных малой выборки // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2021. № 3. –С. 67–74. doi:10.21685/2072-3059-2021-3-7

22. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования М.: Техносфера, 2007. –320 с.

23. Безяев А.В. Биометрико-нейросетевая аутентификация: обнаружение и исправление ошибок в длинных кодах без накладных расходов на избыточность: препринт / А.В. Безяев. –Пенза: Изд-во ПГУ, 2020. – 40 с., ISBN 978-5-907262-59-1.