

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

А. И. Иванов

Нейросетевой многокритериальный
статистический анализ малых выборок

Справочник

Пенза
Издательство ПГУ
2022

УДК 519.22; 53; 57.017
ББК 32.818
И18

Р е ц е н з е н т

доктор технических наук, профессор,
ученый секретарь Научно-производственного
предприятия «Рубин» (г. Пенза)
М. М. Бутаев

Иванов, Александр Иванович.
И18 Нейросетевой многокритериальный статистический анализ малых выборок : справочник / А. И. Иванов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. – 160 с.

ISBN 978-5-907600-83-6

Рассматриваются проблемы статистической обработки малых выборок реальных данных. Созданные в прошлом веке критерии проверки гипотезы нормального распределения и/или равномерного распределения, к сожалению, дают решения с приемлемой доверительной вероятностью на больших выборках в 200 и более опытов. Как правило, выборки реальных данных оказываются много меньше. С проблемой нехватки реальных данных сталкиваются медики, экономисты, биологи и представители других профессий. Очень остро эта проблема стоит перед специалистами биометрической идентификации личности человека. Накопленный в России опыт в направлении нейросетевого статистического анализа малых выборок систематизирован и изложен в данном справочнике. Представлена 21 программная реализация классических статистических критериев прошлого века. Кроме того, приводится 78 реализаций новых статистических критериев, созданных в начале XXI в. Итого в справочнике даны короткие программы для моделирования 99 статистических критериев и соответствующих им искусственных нейронов.

Издание предназначено для студентов, аспирантов, преподавателей, занимающихся вопросами статистического анализа данных на малых выборках.

УДК 519.22; 53; 57.017
ББК 32.818

Индексы цитирования автора:
Scopus – 57189212610;
РИНЦ 744989; SPIN-код 2277-7744.

ISBN 978-5-907600-83-6

© Иванов А. И., 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ.....	13
ВВЕДЕНИЕ.....	17
ФУНКЦИИ ЯЗЫКА MathCAD, ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ПРИ ПРОГРАММИРОВАНИИ В ДАННОМ СПРАВОЧНИКЕ	20
Глава 1. НЕЙРОСЕТЕВЫЕ ЭКВИВАЛЕНТЫ КЛАССИЧЕСКИХ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАЛЫХ ВЫБОРОК РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ.....	21
1.1. Искусственные нейроны хи-квадрат критерия Пирсона	21
1.2. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Крамера – фон Мизеса	23
1.3. Критерий четвертого статистического момента Пирсона	24
1.4. Сборка простейшей самокорректирующейся нейрокодовой конструкции с трехкратной кодовой избыточностью	25
1.5. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Колмогорова – Смирнова	26
1.6. Искусственный нейрон, построенный как аналог критерия Гире	27
1.7. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Смирнова – Крамера – фон Мизеса.....	28
1.8. Попытка ортогонализации статистической обработки данных, критерий Неймана – Бартона	28
1.9. Искусственный нейрон, построенный на использовании критерия Шермана	29
1.10. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Раньи.....	30
1.11. Искусственный нейрон, построенный на критерии Андерсона – Дарлинга	30
1.12. Искусственный нейрон нормированного размаха Девида – Хартли – Пирсона	31
1.13. Искусственный нейрон, соответствующий интегральному критерию Ватсона	32
1.14. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Шапиро – Уилка	32
1.15. Искусственный нейрон, соответствующий критерию максимальной разности между соседними отсчетами.....	33

1.16. Искусственный нейрон, воспроизводящий работу критерия максимального отклонения от центра распределения малой выборки	34
1.17. Искусственный нейрон, являющийся аналогом критерия Васичека	34
1.18. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Локка – Спурье	35
1.19. Искусственный нейрон, созданный на основе критерия Фроцини	36
1.20. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Муроты – Такеучи	37
1.21. Искусственный нейрон, построенный как эквивалент критерия Лоулеса	37
1.22. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Али – Черго – Ревиса	38
Глава 2. СИНТЕЗ НОВЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ НАЧАЛА ХХІ в. ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ НОРМАЛЬНОГО И РАВНОМЕРНОГО ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАННЫХ МАЛЫХ ВЫБОРОК.....	40
2.1. Новые искусственные нейроны, построенные на базе классических статистических критериев, отображенных в пространство дифференциальных входных данных	40
2.1.1. Дифференциальный вариант критерия Крамера – фон Мизеса	40
2.1.2. Искусственный нейрон, являющийся дифференциальным аналогом критерия Колмогорова – Смирнова	41
2.1.3. Искусственный нейрон, являющийся дифференциальным аналогом критерия Смирнова – Крамера – фон Мизеса	42
2.1.4. Искусственный нейрон, являющийся дифференциальным аналогом критерия Андерсона – Дарлинга	43
2.1.5. Искусственный нейрон, являющийся дифференциальным аналогом критерия Фроцини	45
2.1.6. Искусственный нейрон, являющийся дифференциальным аналогом критерия Ватсона	46
2.1.7. Искусственный нейрон, являющийся дифференциальным аналогом критерия Гири.....	47
2.1.8. Искусственный нейрон, являющийся дифференциальным аналогом критерия Раньи	48

2.1.9. Дифференциальный вариант критерия Али – Черго – Ревиса.....	49
2.1.10. Интегральный вариант критерия Али – Черго – Ревиса.....	49
2.1.11. Критерий Гири, накапливающий данные в пространстве двойного дифференцирования.....	50
2.2. Новые статистические критерии, построенные на накоплении данных в пространстве среднего геометрического и среднего гармонического	51
2.2.1. Возможные преобразования пространств, где выполняется накопление (усреднение) данных.....	51
2.2.2. Обогащение данных суммированием произведений интегральной и дифференциальной функций вероятности.....	52
2.2.3. Обогащение данных суммированием произведений плотности вероятности и первой производной входных случайных данных.....	53
2.2.4. Обогащение данных суммированием произведений плотности вероятности и модуля второй производной входных случайных данных.....	54
2.2.5. Обогащение данных вычислением среднего геометрического	55
2.2.6. Обогащение данных вычислением среднего гармонического, умноженного на медиану разброса данных малой выборки	56
2.3. Критерии, построенные на оценке вероятности редких событий в хвостах анализируемых распределений	57
2.3.1. Искусственный нейрон, соответствующий сумме вероятностей хвостов	57
2.3.2. Искусственный нейрон, соответствующий сумме обратных плотностей вероятности	58
2.3.3. Искусственный нейрон, соответствующий дифференциальному критерию, построенному на провале чувствительности к данным выборки в центре и подчеркивании влияния хвостов.....	58
2.3.4. Искусственный нейрон, соответствующий интегральному критерию, построенному на провале чувствительности к данным выборки в центре и подчеркивании влияния хвостов	59
2.3.5. Искусственный нейрон, соответствующий критерию, построенному на произведении дифференциального и интегрального критериев с провалом чувствительности в центре выборки	60

2.3.6. Искусственный нейрон, соответствующий критерию, построенному на произведении дифференциального и интегрального критериев по каждому отсчету малой выборки.....	61
2.3.7. Искусственный нейрон, соответствующий критерию, построенному на дифференцировании входных данных и провале чувствительности в центре малой выборки	62
2.3.8. Искусственный нейрон, соответствующий критерию, построенному на двойном дифференцировании входных данных и провале чувствительности в центре малой выборки.....	63
2.3.9. Искусственный нейрон, соответствующий критерию, построенному на замене производной входных данных функцией их вероятности	64
2.4. Перспективы использования полиномиальных искусственных нейронов.....	66
2.4.1. Частично ортогональная статистическая обработка данных за счет использования полиномов Лежандра	66
2.4.1.1. Утрата ортогональности полиномами Лежандра на малых выборках	66
2.4.1.2. Численный эксперимент по использованию полиномов Лежандра как частично ортогональных на малых выборках	67
2.4.1.3. Дробление интегрального критерия Неймана – Бартона на три самостоятельных критерия.....	68
2.4.2. Мультипликативное объединение полиномов Лежандра с классическим статистическим критерием Васичека	69
2.4.2.1. Совместное численное моделирование критерия Васичека и оптимизированного полинома Лежандра второго порядка.....	69
2.4.2.2. Моделирование почти ортогональных полиномов Лежандра второго порядка	70
2.4.2.3. Мультипликативный синтез новых более мощных статистических критериев умножением и делением выходных состояний классического критерия Васичека и полиномиального критерия Лежандра	71
2.4.2.4. Синтез нейросетевого корректора ошибок с тройной кодовой избыточностью для разделения данных малых выборок с нормальным и равномерным распределениями.....	72

2.4.3. Варианты производных полиномов Лежандра, полученных перемножением с дифференцированием и интегрированием входных данных случайной выборки.....	74
2.4.3.1. Произведение полинома Лежандра первого порядка и интеграла входных данных малой выборки.....	74
2.4.3.2. Произведения полиномов Лежандра первого и второго порядка и производной входных случайных данных малой выборки	74
2.4.3.3. Произведение полиномов Лежандра первого и второго порядка с интегрированием входных случайных данных малой выборки.....	75
2.4.4. Частично ортогональная статистическая обработка данных за счет использования полиномов Эрмита частично ортогональных для малых выборок нормальных данных.....	76
2.4.4.1. Искусственный нейрон, построенный на критерии квадрата второго полинома Эрмита частично ортогонального для нормальных входных данных.....	76
2.4.4.2. Искусственный нейрон эквивалентный критерию, построенному на произведении первого и третьего полиномов Эрмита.....	78
2.4.4.3. Искусственный нейрон эквивалентный критерию, построенному на квадрате четвертого полинома Эрмита.....	78
2.4.4.4. Искусственный нейрон эквивалентный критерию, построенному на мультипликативном объединении трех первых полиномиальных критериев Эрмита	79
2.4.4.5. Искусственный нейрон эквивалентный критерию, построенному на аддитивном объединении трех первых полиномиальных критериев Эрмита	81
2.4.4.6. Сеть искусственных нейронов, построенная на свертывании кодовой избыточности трех первых полиномиальных нейронов Эрмита.....	82
2.4.4.7. Искусственный нейрон, построенный на мультипликативном объединении суммы модулей полинома Эрмита четвертого порядка с критерием среднего гармонического.....	83
2.4.5. Частично ортогональная статистическая обработка данных за счет использования полиномов Лагерра	84

2.4.5.1. Искусственные нейроны, полученные из четырех первых почти ортогональных полиномов Лагерра.....	84
2.4.5.2. Искусственный нейрон, полученный умножением критерия Крамера – фон Мизеса с критерием полинома Лагерра второго порядка.....	86
2.4.5.3. Искусственный нейрон, полученный умножением полиномов Крамера – фон Мизеса с модулем полинома Лагерра второго порядка (второго рода) перед накоплением данных.....	87
2.4.5.4. Искусственный нейрон, полученный перемножением критерия Гири с критерием полинома Лагерра второго порядка.....	88
2.4.5.5. Искусственный нейрон, полученный перемножением полиномов Гири с полиномом Лагерра второго порядка (второго рода) перед накоплением данных.....	89
2.4.5.6. Искусственный нейрон, полученный перемножением критерия Гири с критерием произведения полиномов Лагерра первого и третьего порядков.....	90
2.4.5.7. Искусственный нейрон, полученный перемножением критерия Фроцини с модулем полинома Лагерра второго порядка (второго рода) перед накоплением данных.....	91
2.4.5.8. Искусственный нейрон, полученный перемножением критерия Фроцини с критерием полинома Лагерра второго порядка.....	92
2.4.5.9. Искусственный нейрон, полученный мультипликативным объединением критерия Мурота – Такеучи с критерием полинома Лагерра второго порядка.....	93
2.4.6. Вариации на тему синтеза гибридов классических статистических критериев с критерием Колмогорова – Смирнова.....	94
2.4.6.1. Гибрид хи-квадрат критерия Пирсона с критерием Колмогорова – Смирнова.....	94
2.4.6.2. Гибрид критерия Фроцини с критерием Колмогорова – Смирнова.....	95
2.4.6.2.1. Гибрид классического критерия Фроцини с критерием Колмогорова – Смирнова.....	95
2.4.6.2.2. Гибрид дифференциального варианта критерия Фроцини с критерием Колмогорова – Смирнова.....	95

2.4.6.3. Гибрид критерия четвертого статистического момента с критерием Колмогорова – Смирнова.....	96
2.4.6.4. Гибрид критерия Али – Черго – Ревиса с критерием Колмогорова – Смирнова.....	97
2.4.6.4.1. Гибрид классического критерия Али – Черго – Ревиса с критерием Колмогорова – Смирнова....	97
2.4.6.4.2. Гибрид дифференциального варианта критерия Али – Черго – Ревиса с критерием Колмогорова – Смирнова.....	98
2.4.6.4.3. Гибрид интегрального варианта критерия Али – Черго – Ревиса с критерием Колмогорова – Смирнова.....	99
2.4.6.5. Гибрид критерия Гири с критерием Колмогорова – Смирнова.....	100
2.4.6.5.1. Гибрид классического критерия Гири с критерием Колмогорова – Смирнова.....	100
2.4.6.5.2. Гибрид дифференциального аналога критерия Гири с критерием Колмогорова – Смирнова.....	100
2.4.6.5.3. Гибрид двойного дифференцирования накапливаемых данных перед вычислением критерия Гири с последующим применением критерия Колмогорова – Смирнова.....	101
2.4.7. Статистические критерии, модифицированные предварительным сглаживанием гистограмм распределения входных данных для увеличения объема малой выборки.....	102
2.4.7.1. Модификация интерполяцией входных данных хи-квадрат критерия Пирсона.....	102
2.4.7.1.1. Модификация интерполяцией входных данных классического хи-квадрат критерия Пирсона.....	102
2.4.7.1.2. Модификация интерполяцией входных данных хи-квадрат критерия Пирсона за счет его деления на функцию $rg1$ с провалом в центре выборки.....	103
2.4.7.2. Модификация интерполяцией входных данных критерия Джини.....	105
2.4.7.2.1. Модификация интерполяцией входных данных классического критерия Джини.....	105
2.4.7.2.2. Модификация интерполяцией входных данных дифференциального варианта критерия Джини.....	107

2.4.7.2.3. Модификация интерполяцией входных данных критерия Джини с ослаблением влияния центра выборки	109
2.4.7.3. Модификация интерполяцией входных данных классического критерия Али – Черго – Ревиса	110
2.4.7.3.1. Модификация интерполяцией входных данных классического критерия Али – Черго – Ревиса	110
2.4.7.3.2. Модификация интерполяцией входных данных дифференциального аналога критерия Али – Черго – Ревиса	111
2.4.7.4. Модификация интерполяцией входных данных критерия Гири	112
2.4.7.4.1. Модификация интерполяцией входных данных классического критерия Гири	112
2.4.7.4.2. Модификация интерполяцией входных данных дифференциального варианта критерия Гири	113
Заключение по главе 2	114
Глава 3. ПЕРСПЕКТИВА ПЕРЕХОДА ОТ ОБЫЧНЫХ БИНАРНЫХ НЕЙРОНОВ К БОЛЕЕ ЭФФЕКТИВНЫМ И БОЛЕЕ СЛОЖНЫМ ИСКУССТВЕННЫМ НЕЙРОНАМ С МНОГОУРОВНЕВЫМИ ВЫХОДНЫМИ КВАНТОВАТЕЛЯМИ.....	115
3.1. Численная оценка корреляционных связей группы из пяти статистических критериев.....	115
3.2. Корректировка кодов с пятикратной избыточностью сети простейших бинарных искусственных нейронов.....	116
3.3. Предсказание желаемой избыточности бинарных нейрокодовых конструкций с обнаружением и исправлением ошибок	118
3.4. Симметризация задачи учета корреляционных связей при моделировании искусственных нейронов.....	118
3.5. Подбор порога квантования пяти симметричных искусственных нейронов.....	120
3.6. Оценка снижения вероятности ошибок при устранении пятикратной кодовой избыточности	120
3.7. Оценка влияния коэффициентов корреляционной сцепленности на прогноз числа необходимых статистических критериев.....	122
3.8. Моделирование бинарных искусственных нейронов Гири через использование симметризованных корреляционных матриц	123

3.9. Моделирование симметричных нейронов Гири при коэффициенте корреляционной сцепленности $r = 0.5$ и вероятностями ошибок $P_{EE} = 0.251$	124
3.10. Перспектива перехода к использованию четверичных нейронов Гири.....	125
3.11. Оценка роста качества принимаемых решений при переходе к использованию троичных и пятеричных искусственных нейронов при $r = 0.431$ и вероятностями ошибок $P_{EE} = 0.251$	127
Заключение по главе 3.....	130
Глава 4. ЗАМЕНА КЛАССИЧЕСКИХ БИНАРНЫХ КОДОВ С ОБНАРУЖЕНИЕМ И ИСПРАВЛЕНИЕМ ОШИБОК НА МНОГОСЛОЙНЫЕ, БЫСТРО ОБУЧАЕМЫЕ СЕТИ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОНОВ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВОЗБУЖДЕНИЯ	
4.1. «Нечеткие экстракторы» как предшественники однослойных сетей искусственных нейронов	132
4.2. Использование сетей искусственных нейронов для обогащения «сырых» биометрических данных перед их квантованием	134
4.3. Влияние уровня обогащения данных (числа входов у искусственного нейрона) на ширину выходных спектров расстояний Хэмминга «Свой» и «Чужие»	135
4.4. Хи-квадрат нейрон Пирсона с кусочно-линейной функцией возбуждения	138
4.5. Искусственный нейрон четвертого статистического момента с кусочно-линейной функцией преобразования.....	139
4.6. Искусственный нейрон Фроцини с кусочно-линейной функцией возбуждения	140
4.7. Двухслойная нейросеть, обобщающая выходные состояния искусственных нейронов Пирсона, Фроцини и четвертого статистического момента.....	141
4.7.1. Двухслойная нейросеть без учета уровня доверия к решениям объединяемых статистических критериев	141
4.7.2. Учет доверия к решениям объединяемых статистических критериев	142
4.7.3. Использование сверточного искусственного нейрона minPooling во втором слое без учета доверия к частным решениям	143

4.7.4. Использование сверточного искусственного нейрона minPooling во втором слое при учете доверия к частным решениям.....	144
4.8. Эффект отказа от наличия участков «насыщения» при программной реализации выходных кусочно-линейных функций искусственных нейронов	145
4.8.1. Хи-квадрат нейрон без участков «насыщения»	145
4.8.2. Искусственный нейрон четвертого статистического момента без участков «насыщения».....	145
4.8.3. Искусственный нейрон Фроцини без участков «насыщения»	146
4.8.4. Объединение трех нейронов без участков «насыщения» minPooling сверточным нейроном без учета доверия к частным решениям.....	146
4.8.5. Объединение трех нейронов без участков «насыщения» minPooling сверточным нейроном при учете доверия к частным решениям.....	147
4.9. Линейно-квадратичные функции предсказания качества решений, принимаемых искусственными нейронами.....	148
Заключение по главе 4.....	151
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	153

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

1. χ^2 – хи-квадрат критерий Пирсона (1900) [3] (с. 22);
2. KfM – критерий Крамера – фон Мизеса (1928) [3] (с. 23);
3. μ_4 – критерий четвертого статистического момента Пирсона (1930) [8] (с. 24);
4. KS – критерий Колмогорова – Смирнова (1933) [3] (с. 27);
5. G – критерий Гири (1935) [10] (с. 27);
6. SKfM – критерий Смирнова – Крамера – фон Мизеса (1937) [11] (с. 28);
7. NB – критерий Неймана – Бартона (1937) [12] (с. 29);
8. Dj – критерий Джини (1941) [3];
9. S – критерий Шермана (1950) [13] (с. 29);
10. R – критерий Раньи (1953) [14] (с. 30);
11. AD – критерий Андерсона – Дарлинга (1954) [15] (с. 31);
12. Rs – критерий нормированного размаха (1954) [17] (с. 31);
13. W – критерий Ватсона (1961) [18] (с. 32);
14. NU – критерий Шапиро – Уилка (1965) [19] (с. 33);
15. mdx – критерий максимального интервала между отсчетами (1965) [20] (с. 33);
16. Em – критерий максимального отклонения точек от центра (1965) [20] (с. 34);
17. V5 – критерий Васичека (1976) [21] (с. 35);
18. LS – критерий Локка – Спурье (1976) [22] (с. 36);
19. Fr – критерий Фроцини (1978) [23] (с. 36);
20. MT – критерий Мурота – Такеучи (1981) [24] (с. 37);
21. L – критерий Лоулеса (1982) [25] (с. 38);
22. ASR – критерий Али – Черго – Ревиса (1992) [26] (с. 38);
23. dDj – дифференциальный вариант критерия Джини [52, 53];
24. dKfM – дифференциальный аналог критерия Крамера – фон Мизеса (2016) [27] (с. 41);
25. dKS – дифференциальный аналог критерия Колмогорова – Смирнова (2022) [29] (с. 42);
26. dSKfM – дифференциальный аналог критерия Смирнова – Крамера – фон Мизеса (2016) [27] (с. 43);
27. dAD – дифференциальный аналог критерия Андерсона – Дарлинга (2016) [27] (с. 44);
28. dFr – дифференциальный аналог критерия Фроцини (2016) [27] (с. 45);
29. dW – дифференциальный вариант интегрального критерия Ватсона (с. 46);
30. dG – дифференциальный вариант критерия Гири (с. 48);
31. ddG – критерий Гири, накапливающий данные в пространстве второй производной (с. 51);

32. dR – дифференциальный вариант критерия Раньи (с. 49);
33. $dASR$ – дифференциальный вариант критерия Али – Черго – Ревиса (с. 49);
34. $iASR$ – интегральный вариант критерия Али – Черго – Ревиса (с. 50);
35. ssg – критерий суммы квадрата среднего геометрического (2014) [31] (с. 53);
36. DD – критерий дифференциала входных данных (2021) [34] (с. 54);
37. $d2d$ – критерий модуля второй производной входных данных (с. 55);
38. sg – критерий среднего геометрического [33] (с. 55);
39. Lm – модифицированный критерий Лоулеса (с. 56);
40. sx – критерий суммы вероятностей хвостов [35] (с. 57);
41. osx – критерий суммы обратных плотностей вероятности (с. 58);
42. $pr1$ – дифференциальный критерий подавления данных в центре (с. 59);
43. $pr2$ – интегральный критерий подавления данных в центре (с. 60);
44. $pr3$ – интегродифференциальный критерий подавления данных в центре (с. 61);
45. $pr4$ – интегродифференциальный критерий среднего геометрического (с. 62);
46. $pr5$ – критерий $pr1$ по первой производной входной выборки (с. 65);
47. $dpr5$ – дифференциальный вариант критерия $pr5$ (с. 63);
48. $d2pr5$ – второй дифференциальный вариант критерия $pr5$ (с. 64);
49. $L2$ – критерий полинома Лежандра второго порядка (с. 68);
50. $L13$ – критерий произведения полиномов Лежандра 1-го и 3-го порядков (с. 68);
51. $L1^2$ – критерий квадрата полинома Лежандра 1-го порядка (с. 69);
52. $L2^2$ – критерий квадрата полинома Лежандра 2-го порядка (с. 69);
53. $L3^2$ – критерий квадрата полинома Лежандра 3-го порядка (с. 69);
54. Le – критерий модуля полинома Лежандра 2-го порядка (с. 69);
55. LeV – критерий произведения модуля полинома Лежандра 2-го порядка на отклик критерия Васичека (с. 72);
56. Le/V – критерий деления модуля полинома Лежандра 2-го порядка на отклик критерия Васичека (с. 73);
57. iL_1 – критерий произведения полинома Лежандра 1-го порядка, простейший интеграл входных данных (с. 75);
58. $dL12$ – критерий произведения 1-го и 2-го полиномов Лежандра на дифференциал входных данных (с. 75);
59. $iL12$ – критерий произведения 1-го и 2-го полиномов Лежандра на простейший интеграл входных данных (с. 76);
60. $E2$ – критерий квадрата второго полинома (с. 78);
61. $E13$ – критерий произведения 1-го и 2-го полиномов Эрмита (с. 78);
62. $E4$ – критерий квадрата 4-го полинома Эрмита (с. 79);
63. $sgarE4$ – объединение среднего гармонического и критерия суммы модулей полиномов Эрмита четвертого порядка (2021) [47] (с. 83);

64. mE – обобщение трех критериев Эрмита вычислением их среднего геометрического (с. 80);
65. sE – обобщение трех критериев Эрмита вычислением их среднего (с. 81);
66. La_2 – критерий полинома Лагерра 2-го порядка (2022) [47] (с. 85);
67. La_2KfM – критерий полинома Лагерра 2-го порядка, умноженного на критерий Крамера – фон Мизеса (2022) [48] (с. 86);
68. La_2KfM_2 – критерий полинома Лагерра 2-го порядка, умноженного на критерий Крамера – фон Мизеса второго рода;
69. La_2G – критерий полинома Лагерра 2-го порядка, умноженного на критерий Гири (с. 88);
70. sLa_2G – критерий полинома Лагерра 2-го порядка, умноженного на критерий Гири второго рода (с. 89);
71. sLa_13G – критерий произведения полиномов Лагерра 1-го и 3-го порядка, умноженного на критерий Гири второго рода (с. 90);
72. La_2Fr – критерий полинома Лагерра 2-го порядка, умноженного на критерий Фроцини (с. 92);
73. sLa_2Fr – критерий, полученный перемножением полиномов Лагерра 2-го порядка, умноженного на модуль полиномов Фроцини (с. 91);
74. La_2MT – критерий полинома Лагерра 2-го порядка, умноженного на критерий Мурота – Такеучи (с. 93);
75. χ_2KS – гибрид хи-квадрат критерия Пирсона (1900) [3] и критерия Колмогорова – Смирнова (1933) [3] (с. 94);
76. $FrKS$ – гибрид классического критерия Фроцини (1978) [23] и критерия Колмогорова – Смирнова (1930) [8]; (1933) [3] (с. 95);
77. $dFrKS$ – гибрид дифференциального критерия Фроцини (2016) [27] и критерия Колмогорова – Смирнова (1933) [3] (с. 96);
78. μ_4KS – гибрид четвертого статистического момента Пирсона (1930) [8] и критерия Колмогорова – Смирнова (1933) [3] (с. 97);
79. $ASRKS$ – гибрид критерия Али – Черго – Ревиса (1992) [26] с критерием Колмогорова – Смирнова (1933) [3] (с. 98);
80. $dASRKS$ – гибрид дифференциального варианта критерия Али – Черго – Ревиса с критерием Колмогорова – Смирнова (1933) [3];
81. $iASRKS$ – гибрид интегрального варианта критерия Али – Черго – Ревиса с критерием Колмогорова – Смирнова (1933) [3] (с. 99);
82. GKS – гибрид классического критерия Гири (1935) [10] с критерием Колмогорова – Смирнова (1933) [3] (с. 100);
83. $dGKS$ – гибрид дифференциального критерия Гири с критерием Колмогорова – Смирнова (1933) [3] (с. 101);
84. $ddGKS$ – гибрид критерия Гири, накапливающего данные в пространстве вторых производных и критерия Колмогорова – Смирнова (1933) [3] (с. 102);

85. $s\chi^2$ – хи-квадрат критерий Пирсона, модифицированный интерполяцией входных данных (с. 103);
86. $s\chi^2pr1$ – хи-квадрат критерий Пирсона, модифицированный интерполяцией входных данных с делением его значения на провал в центре выборки $pr1$ (с. 105);
87. $Djpr1$ – критерий Джини, модифицированный взвешиванием данных, подавляющих влияние центра малой выборки;
88. sDj – критерий Джини, модифицированный сглаживанием гистограммы (2014) [51, 52] (с. 106);
89. $sdDj$ – дифференциальный критерий Джини, модифицированный сглаживанием гистограммы (2015) [53, 54] (с. 108);
90. $sDjpr1$ – критерий Джини, модифицированный сглаживанием гистограммы и провалом чувствительности в центре (с. 110);
91. $sASR$ – критерий Али – Черго – Ревиса, модифицированный интерполяцией входных данных (с. 111);
92. $sdASR$ – дифференциальный критерий Али – Черго – Ревиса, модифицированный интерполяцией входных данных;
93. sG – критерий Гири, модифицированный интерполяцией входных данных (с. 112);
94. sdG – дифференциальный критерий Гири, модифицированный интерполяцией входных данных (с. 113);
95. χ^2_{Lin} – хи-квадрат нейрон Пирсона с кусочно-линейным выходным преобразованием (с. 139);
96. μ^4_{Lin} – искусственный нейрон, соответствующий критерию взвешенного четвертого статистического момента с выходной кусочно-линейной функцией преобразования (с. 140);
97. Fr_{Lin} – искусственный нейрон Фроцини с выходной кусочно-линейной функцией преобразования (с. 140);
98. $F2$ – искусственный нейрон второго слоя, обобщающий суммированием выходные данные нейронов первого слоя с выходными кусочно-линейными функциями (с. 142);
99. $minPool$ – сверточный искусственный нейрон второго слоя, выполняющий поиск минимума на выходах всех предшествующих искусственных нейронов предыдущего слоя с выходными кусочно-линейными функциями преобразования (с. 147).

ВВЕДЕНИЕ

В 1900 г. Пирсон создал свой классический хи-квадрат критерий. Этот несомненный успех привел к тому, что усилиями мировой физико-математической общественности за XX в. было создано примерно 200 статистических критериев. Естественно, что столь значительное число статистических критериев создано с учетом многообразия реальных условий и многообразия решаемых статистических задач. В частности, были созданы примерно 20 классических статистических критериев для проверки гипотезы нормального распределения данных. Примерно столько же статистических критериев создано в прошлом веке для проверки гипотезы равномерного распределения данных. Получается, что мы с вами имеем достаточно много уже созданных статистических критериев.

Одной из важнейших проблем являются высокие требования уже созданных классических статистических критериев к объему используемой выборки данных. Когда речь идет о конвейере или другом массовом производстве, получить выборку в 200 опытов не сложно. Совершенно иная ситуация возникает у исследователей одиночек, занимающихся проблемами медицины, экономики, биологии, ботаники и других направлений изучения сложных систем высокой размерности. Биолог, обнаруживший одного кролика с новым сочетанием важных биологических свойств, сможет получить выводок из 16 кроликов-потомков примерно через год. Только через 2 года он получит 256 кроликов-потомков. Если половина из потомков унаследует нужное сочетание биологических свойств, то только через 2 года биолог получит статистически представительную выборку в 128 кроликов. Ждать два года, два года кормить и поить стаю кроликов – это дорого и долго.

Примерно такая же проблема возникает в задачах биометрической идентификации (аутентификации) личности человека. Написать свою рукою рукописный пароль 20 раз не сложно. Если же требовать от человека написать рукописный пароль 200 раз, то это требование воспринимается пользователями негативно. Пользователи обычно считают столь большую выборку примеров обучающей выборки избыточной. В связи с этим удалось создать и стандартизировать алгоритм автоматического обучения больших нейронных сетей ГОСТ Р 52633.5–2011¹. Этот алгоритм позволяет обучать однослойную нейросеть, состоящую из 256 нейронов, каждый из которых имеет по 16 входов на малых обучающих выборках объемом до 20 примеров. В этой книге все искусственные нейроны имеют по 16 входов, по числу данных в малой выборке. Это наследство действующего в России уже 11 лет национального стандарта.

¹ ГОСТ Р 52633.5–2011 «Защита информации. Техника защиты информации. Автоматическое обучение нейросетевых преобразователей биометрия-код доступа».

Каждый искусственный нейрон выполняет функцию обогащения входных данных. Так, если входные биометрические данные слишком «плохие», то требуется компенсировать это, увеличивая число входов у нейронов. Всегда можно подобрать число входов у искусственных нейронов для того, чтобы нейрон принимал решение с требуемой достоверностью. Качество самого решения зависит от числа параллельно используемых искусственных нейронов. Чем больше нейронов, обрабатывающих входные данные, тем выше качество итогового решения.

Следует отметить, что статистические критерии прошлого века, начиная с хи-квадрат критерия Пирсона, ориентированы на ручное применение. Обязательно с тем или иным критерием создавались специальные таблицы доверительной вероятности. Человек-математик после выполненных вычислений должен был воспользоваться заранее вычисленными таблицами при оценке итоговой доверительной вероятности. Фактически все таблицы существующих критериев есть не что иное, как таблицы компромиссов между ошибками первого и второго рода. Всегда можно свернуть таблицы, зафиксировав соотношения доверительной вероятности и размер обрабатываемой выборки. При этом утрачивается универсальность ручного применения того или иного статистического критерия. Однако это только поверхностный взгляд. На самом деле нам не нужна универсальность в обмен на необходимость в ручных вычислениях. Ручные вычисления всегда крайне дороги и малоэффективны. В 1900 г. ручным вычислениям не было альтернативы. Однако уже в середине XX в. появилась возможность переложить вычисления на ламповые ЭВМ. Во второй половине прошлого века компьютеры бурно развивались и к началу этого века дефицит вычислительных ресурсов исчез. Сегодня мы можем выполнять очень сложные вычисления. При этом мы можем поменять простоту вычислений с низким доверием на более сложные вычисления, но имеющие более высокий уровень доверия.

К сожалению, вся история предшествующих многовековых ручных вычислений негласно приветствовала вычислительную простоту. Исследователи, будучи сами вычислителями, интуитивно стремились выбирать вычислительную простоту. Сегодня этот подход утратил свою актуальность. Сегодня можно усложнять вычисления в сотни и тысячи раз, нет смысла экономить вычислительные ресурсы компьютеров, когда они есть. Экономить нужно по-прежнему ресурсы людей, теперь ресурсы людей-программистов.

В этом контексте и нужен данный справочник. В нем приводятся короткие программы, написанные на язык MathCAD, воспроизводящие работу искусственных нейронов эквивалентных классическим статистическим критериям. Формально эту работу может выполнить любой человек, обладающий минимальными знаниями по статистике

и по программированию. Более сложная вторая часть справочника касается описания новых статистических критериев, синтезированных уже в этом веке. Данные об этих новых статистических критериях пока разбросаны только по специальным журналам нейросетевой биометрической аутентификации, которые не просматривают специалисты по математической статистике, медицине, экономике, биологии, зоологии и ботанике.

Еще одним очень важным моментом является то, что преобразования, используемые математиками при конструировании того или иного статистического критерия, опираются на знание об асимптотическом поведении различных математических конструкций. В этом отношении читать статистические справочники, написанные математиками для математиков, крайне сложно. В части справочников приводятся конкретные примеры расчетов. Следуя этой традиции в современном варианте, справочник содержит множество коротких программ в несколько строк кода, позволяющих увидеть распределения выходных состояний того или иного критерия. В этом отношении короткие программы справочника играют двоякую роль. С одной стороны, они позволяют упростить задачу программистам, с другой – позволяют любому человеку лично проверить все утверждения в справочнике.

ФУНКЦИИ ЯЗЫКА MathCAD, ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ПРИ ПРОГРАММИРОВАНИИ В ДАННОМ СПРАВОЧНИКЕ

$x \leftarrow \text{morm}(16, 0, 1)$	возвращает вектор из 16 случайных значений с нормальным законом распределения с нулевым математическим ожиданием и единичным стандартным отклонением;
$x \leftarrow \text{runif}(16, -3, 3)$	возвращает вектор из 16 случайных значений с равномерным законом распределения значения в интервале от -3 до 3 ;
$\text{rnd}(0.01)$	возвращает одно случайное число с равномерным распределением в интервале от 0 до 0.01
$x \leftarrow \text{sort}(x)$	возвращает упорядоченные значения вектора x по их возрастанию;
$m \leftarrow \text{mean}(x)$	возвращает значение математического ожидания;
$\sigma \leftarrow \text{stdev}(x)$	возвращает значение стандартного отклонения;
$\text{pnorm}(x_i, m, \sigma)$	возвращает значение вероятности появления значения x_i для нормального закона распределения с математическим ожиданием m и стандартным отклонением σ ;
$\text{dnorm}(x_i, m, \sigma)$	возвращает значение плотности вероятности появления значения x_i для нормального закона распределения с математическим ожиданием m и стандартным отклонением σ ;
$\text{corr}(x0, x1)$	возвращает значение коэффициента корреляции;
$\text{hist}(\text{int}, h)$	возвращает гистограмму распределения значений вектора h , по числу попаданий в интервалы между возрастающими значениями вектора int .

НЕЙРОСЕТЕВЫЕ ЭКВИВАЛЕНТЫ КЛАССИЧЕСКИХ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАЛЫХ ВЫБОРОК РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

1.1. Искусственные нейроны хи-квадрат критерия Пирсона

Как правило, практика работы с реальными данными должна опираться на использование некоторых статистических гипотез. Например, это может быть гипотеза распределения данных по нормальному закону либо по равномерному закону. Биолог, медик, экономист при своих исследованиях обычно имеют дело с малыми выборками реальных данных. В связи с этим возникает задача проверки той или иной гипотезы на малых выборках при приемлемом для практики уровне достоверности. Более того, в нейросетевой биометрии [1, 2] появляется необходимость быстрого автоматического обучения больших сетей искусственных нейронов на малых обучающих выборках с малым числом примеров. Одним из путей решения этой задачи является подбор входных данных при обучении у того или иного искусственного нейрона. Например, если от нейрона требуется отклик «0» на образ «Свой», то подбирают данные с нормальным распределением. Если на тот же образ «Свой» требуется отклик «1», то входы нейрона подключаются к данным, имеющим равномерное распределение. Этот простой технический прием позволяет создавать быстрые очень устойчивые автоматы обучения больших сетей искусственных нейронов.

Формально для распознавания закона распределения малых выборок входных данных может быть использован классический хи-квадрат критерий Пирсона [3, 4], созданный им в 1900 г. На рис. 1.1 дана программная реализация имитатора выходных состояний критерия на языке MathCAD. Фактически хи-квадрат критерий выполняет роль некоторого «обогапителя» входных данных, решение принимается выходным квантователем нейрона, сравнивающим отклики критерия с единственным порогом $k = 5.9$.

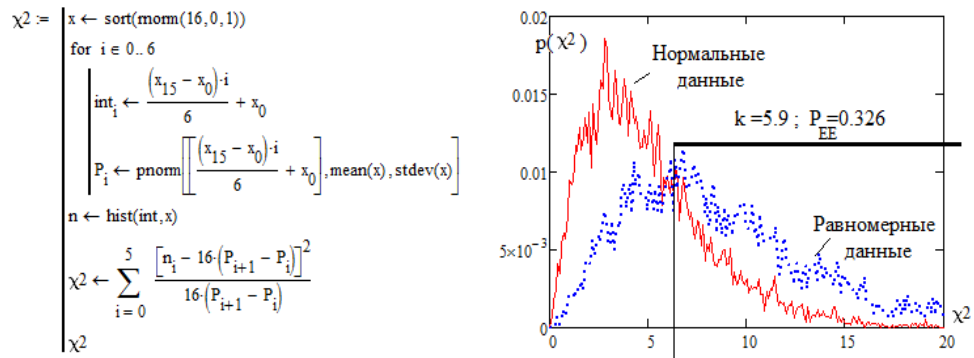


Рис. 1.1. Программная реализация и результаты численного моделирования хи-квадрат нейрона Пирсона, разделяющего малые выборки в 16 опытов с двумя разными законами распределения данных

Как видно из рис. 1.1, хи-квадрат критерий по-разному откликается на входные данные с нормальным распределением и входные данные с равномерным распределением. Порог квантования у рассматриваемого поставлен таким образом, чтобы обеспечить равные значения вероятностей ошибок первого и второго рода $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.326$.

Примерно одинаковое значение вероятностей ошибок позволяет утверждать, что нейрон Пирсона при малых выборках в 16 опытов позволяет получать решения с доверительной вероятностью 0.674. Столь низкая доверительная вероятность неприемлема для практики. Если мы с помощью нейронов Пирсона будем пытаться преобразовать биометрические данные «Свой» в достаточно длинный криптографический ключ в 256 бит, то примерно 33 % разрядов этого ключа будут ошибочными. Для криптографических ключей это недопустимо, ошибка даже в одном бите ключа приводит к отказу доступа по тому или иному протоколу криптографической аутентификации.

Для нейросетевых приложений биометрической защиты должна быть обеспечена доверительная вероятность принятия решений на уровне 0.997. В этом случае мы будем получать один ошибочный ключ примерно на 4 верных ключей для образа «Свой». При этом просто увеличивать размеры анализируемой выборки (увеличивать число входов у нейронов) мы не можем. Это тупиковый путь. На рис. 1.2 приведен искусственный нейрон с 32 входами, который обеспечивает снижение вероятностей ошибок примерно в полтора раза.

Для того, чтобы преобразовать реальную вероятность ошибок хи-квадрат нейрона 0.326 до требуемого значения 0.001, потребуется малую выборку в 16 опытов увеличить в 90 000 раз. Потребуется примерно полтора миллиона входов у хи-квадрат нейрона. Это технически нереально для приложений нейросетевой биометрии.

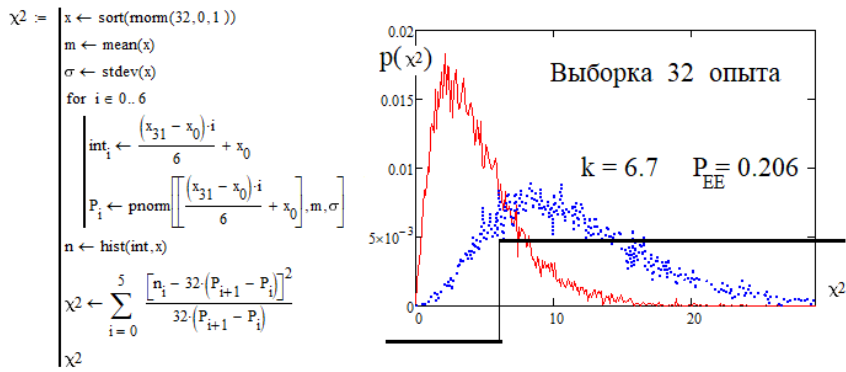


Рис. 1.2. Программная реализация и результаты численного моделирования хи-квадрат нейрона Пирсона, разделяющего малые выборки в 32 опыта с нормальным и равномерным законами распределения данных

Куда более рациональным является использование вместо одного хи-квадрат нейрона множества аналогичных нейронов, соответствующих другим известным статистическим критериям [3, 5–7]. В этом случае нейросеть будет давать избыточный код, а уже при свертывании кодовой избыточности мы получаем возможность повышать достоверность принимаемых решений.

1.2. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Крамера – фон Мизеса

После критерия Пирсона был создан ряд иных параметрических критериев, широко применяемых сегодня на практике [3, 5]. В частности, в 1928 г. [3] был создан статистический критерий Крамера – фон Мизеса (KfM). Программная реализация и результаты численного моделирования нейрона KfM приведены на рис. 1.3. Критерий был построен на вычислении квадратов разности наблюдаемой функции вероятности и ее ожидаемой теоретической функции вероятности.

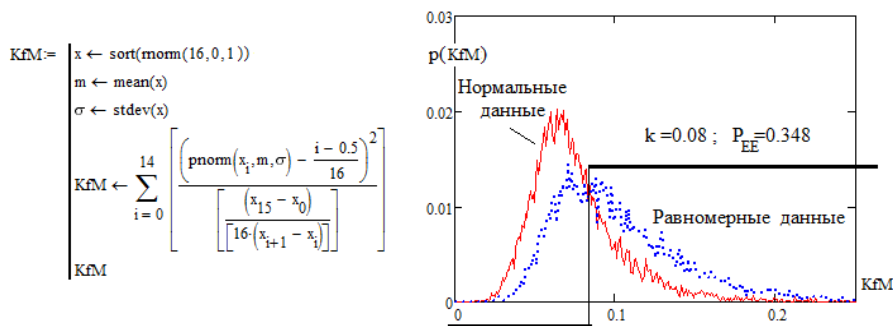


Рис. 1.3. Нейрон эквивалентный критерию Крамера – фон Мизеса (1928) [3]

Если сравнивать между собой два последних критерия, то следует отметить вероятности ошибок первого и второго рода примерно на 7 %. При этом коэффициент корреляции между этими критериями составляет величину $\text{corr}(\chi^2, \text{KfM}) = 0.567$. Корреляция не является единичной, что позволяет использовать оба критерия совместно.

1.3. Критерий четвертого статистического момента Пирсона

Всего за весь XX в. было создано несколько сотен статистических критериев, ориентированных под проверку разных статистических критериев в разных условиях. При этом долгое время хи-квадрат критерий оставался наиболее популярным и самым эффективным. Однако многие исследователи старались найти более мощные аналоги хи-квадрат критерию. В том числе сам Пирсон в 1930 г. показал [8], что нормированный четвертый статистический момент в ряде ситуаций работает лучше хи-квадрат критерия (рис. 1.4).

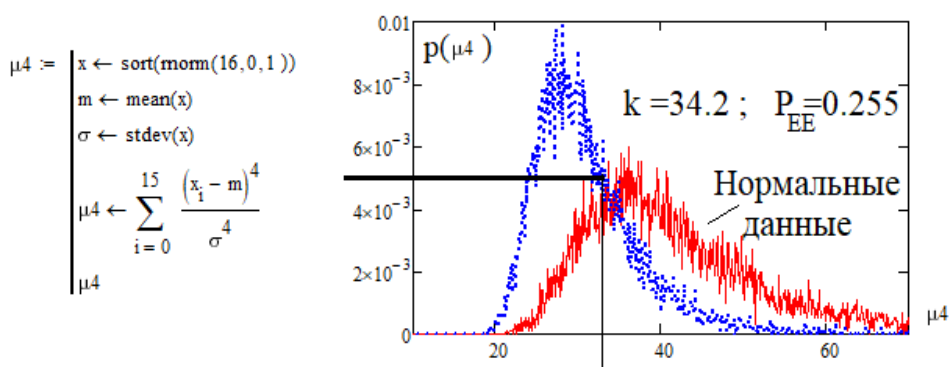


Рис. 1.4. Критерий четвертого статистического момента (1930) [8]

При решении задачи разделения малых выборок с нормальным и равномерным распределениями критерием μ_4 удастся снизить вероятности ошибок примерно на 28 % по сравнению с хи-квадрат критерием. Еще одним важнейшим моментом является то, что второй критерий Пирсона имеет слабую корреляционную связь с хи-квадрат критерием $\text{corr}(\chi^2, \mu_4) = -0.084$, а также с критерием Крамера – фон Мизеса $\text{corr}(\chi^2, \text{KfM}) = -0.08$. Получается, что Пирсон через 30 лет после создания своего первого критерия показал перспективы существенного улучшения его основных статистических характеристик.

1.4. Сборка простейшей самокорректирующейся нейрокодовой конструкции с трехкратной кодовой избыточностью

Совместное использование трех статистических критериев должно давать определенные преимущества. Так как шкалы у трех статистических критериев разные, мы не можем объединять их простым усреднением. Однако мы можем из трех эквивалентных им искусственных нейронов собрать нейросеть, которая будет давать выходной код с трехкратной избыточностью, как это отображено на рис. 1.5.

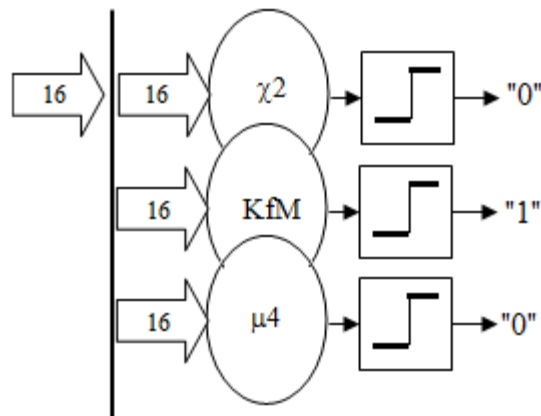


Рис. 1.5. Объединение трех искусственных нейронов $\{\chi^2, KfM, \mu_4\}$ в одну нейросеть

Возникшую кодовую избыточность следует устранить «голосованием» разрядов. Если мы видим состояние «000», то с высокой вероятностью мы можем ожидать нормального распределения значений входных данных. Если мы обнаруживаем в коде два состояния «0», то также должны принять решение об обнаружении нормального распределения входных данных.

Численное моделирование сети из трех искусственных нейронов (рис. 1.5) позволяет снизить вероятность появления ошибок до величины 0.291. Это существенное снижение вероятности появления ошибок по отношению к данным хи-квадрат критерия и данным критерия KfM. Однако это хуже, чем данные лучшего из тройки критерия μ_4 . Тем не менее можно, опираясь на эти данные, оценить, сколько статистических критериев нам потребуется для достижения той или иной доверительной вероятности. Для этой цели необходимо выполнить процедуру симметризации используемых нейронных преобразований [9]. В частности, нужно вычислить среднее геометрическое вероятности ошибок для каждого из искусственных нейронов

$\sqrt[3]{0,326 \cdot 0,348 \cdot 0,255} = 0,307$. Далее в логарифмических координатах следует отобразить полученные данные и выполнить линейную экстраполяцию, как это показано на рис. 1.6.

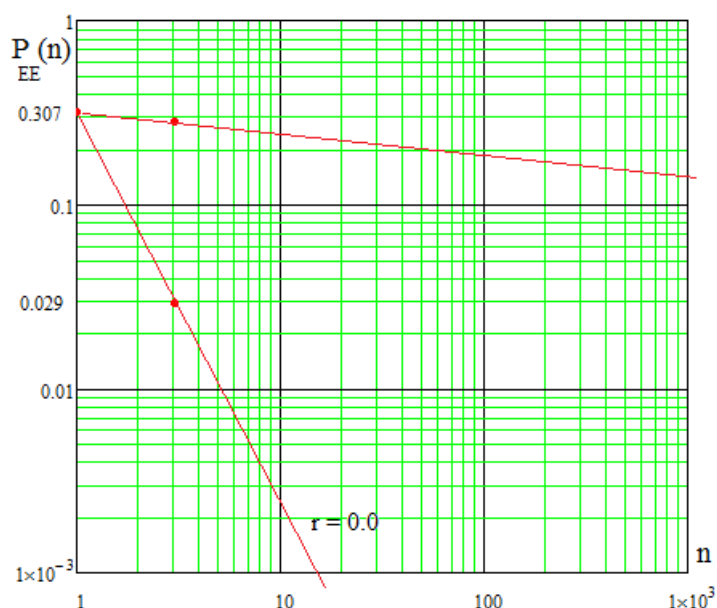


Рис. 1.6. Линейная экстраполяция числа статистических критериев, необходимых при решении задачи нейросетевого разделения малых выборок

Из рис. 1.6 видно, что при полном отсутствии корреляционных связей достаточно 16 статистических критериев, каждый из которых ошибается с вероятностью 0.307. Если же корреляционные связи оказываются сильными, то для достижения доверительной вероятности 0.997 потребуется много больше, чем 1000 статистических критериев.

Корректирующая способность кодов существенно зависит от их избыточности. Чем больше будет объединено статистических критериев, тем лучше. В этом контексте целесообразно выполнить перевод разработанных в прошлом веке статистических критериев в нейросетевую форму их представления.

1.5. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Колмогорова – Смирнова

В 1933 г. Колмогоровым и Смирновым создан первый статистический критерий, принципиально отличающийся от хи-квадрат критерия и критериев статистических моментов. Этот шаг развития статистического анализа важен введением новой структуры обработки

данных, которая уже в этом веке показала свою высокую эффективность. В частности, сегодняшние многослойные сети «глубокого» обучения используют сверточные преобразования (minPooling и maxPooling нейроны), впервые maxPooling преобразования предложены и исследованы Колмогоровым и Смирновым (рис. 1.7).

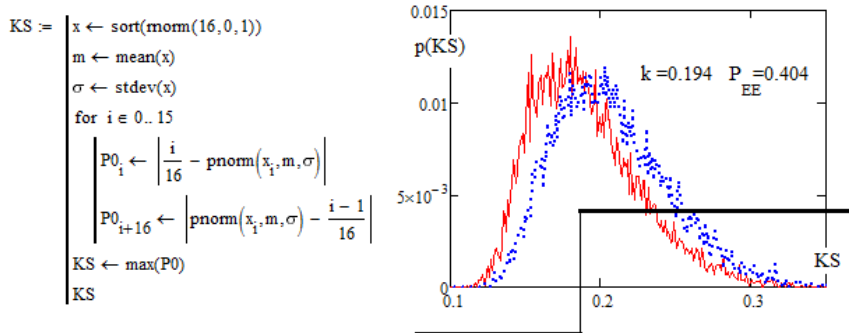


Рис. 1.7. Критерий Колмогорова – Смирнова (1933) [3]

К сожалению, первый вариант критерия Колмогорова – Смирнова на практике не получил широкого распространения из-за того, что его мощность примерно на 20 % оказалась ниже аналогичного показателя эталонного на тот момент хи-квадрат критерия.

1.6. Искусственный нейрон, построенный как аналог критерия Гири

Через два года Гири предложил свой статистический критерий [10], позволивший на малых выборках снизить примерно в три раза вероятности ошибок первого и второго рода по отношению к наиболее популярному хи-квадрат критерию (рис. 1.8).

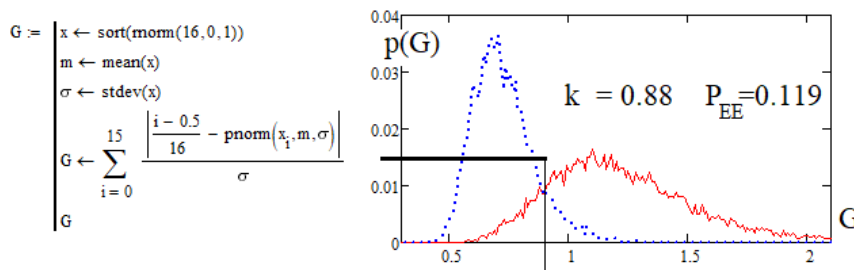


Рис. 1.8. Критерий Гири (1935) [10]

Следует отметить, что все статистические критерии, создаваемые в первой половине XX в., были ориентированы на их одиночное применение. Это было связано с высокой стоимостью вычислительных

ресурсов (ручные вычисления всегда дороги). В связи с этим исследователи опирались на примитивные вычисления, для реализации которых достаточно таблиц и арифмометра. Сегодня эти ограничения сняты, сегодня выполнимы достаточно сложные вычисления на современных компьютерах. Тем не менее стремление к простоте и понятности вычислений остается. В этом отношении Гири удалось уже в 1935 г. достичь рекордно низкого уровня вероятности появления ошибок, перейдя к использованию очень простых промежуточных вычислений.

1.7. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Смирнова – Крамера – фон Мизеса

Критерии проверки статистических гипотез в прошлом веке, как правило, синтезировались эвристикой. Так, в 1937 г. Смирнову удалось значительно усилить критерий Крамера – фон Мизеса путем домножения суммируемых (накапливаемых) данных на ожидаемую плотность распределения (рис. 1.9).

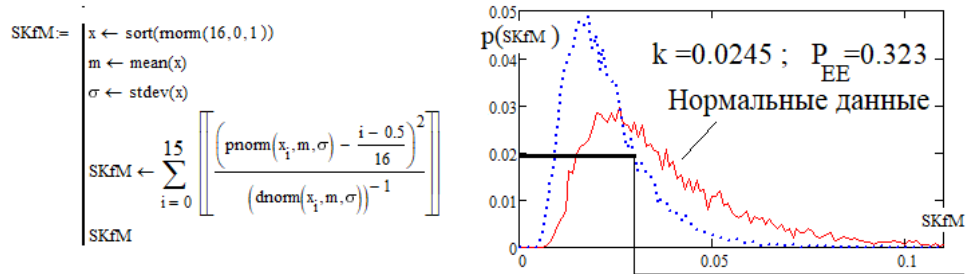


Рис. 1.9. Нейрон эквивалентный критерию Смирнова – Крамера – фон Мизеса (1937) [11]

Это позволило поднять мощность исходного критерия Крамера – фон Мизеса до мощности эталонного на тот момент хи-квадрат критерия. При этом коэффициент коррелированности двух критериев оказался низким $\text{corr}(\chi^2, \text{SKfM}) = 0.352$. Это создает предпосылку для их совместного применения.

1.8. Попытка ортогонализации статистической обработки данных, критерий Неймана – Бартона

Одной из основных проблем обработки малых выборок является плохая устойчивость вычислений. В этом плане большой интерес представляет критерий Неймана – Бартона [12], построенный на использовании ортогональных полиномов Лежандра. Программная реализация нейрона Неймана – Бартона и результаты численного моделирования приведены на рис. 1.10.

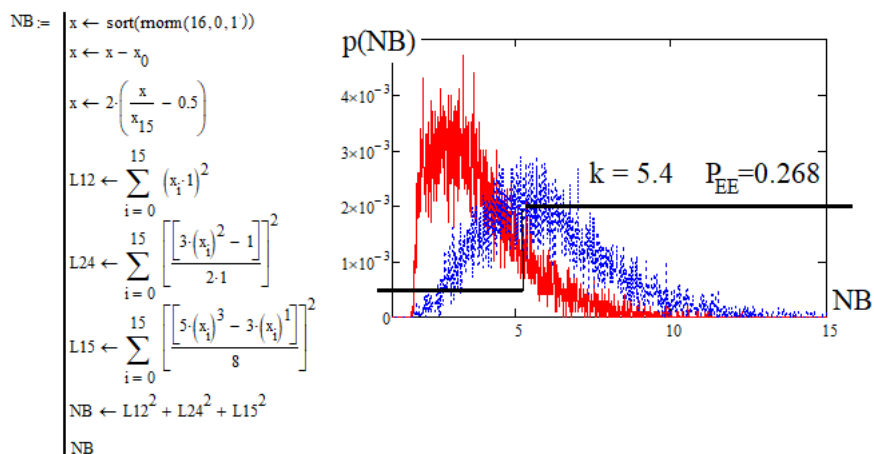


Рис. 1.10. Первый статистический критерий Неймана – Бартона (1937), построенный на использовании трех ортогональных полиномов Лежандра

Ортогонализация преобразований, с одной стороны, сразу дала достаточно эффективный статистический критерий, однако, с другой стороны, это направление исследований не получило массовой поддержки. Причиной низкого интереса к процедурам ортогонализации является утрата ортогональности полиномами Лежандра на малых выборках в 16 опытов и выборках среднего объема в 160 опытов.

1.9. Искусственный нейрон, построенный на использовании критерия Шермана

В 1950-х гг. уже существовали ламповые вычислительные машины, однако они были громоздкими и потребляли много энергии. Считать вычислительные ресурсы ламповых ЭВМ широкодоступными было нельзя. В связи с этим появился критерий Шермана [13], обладающий достаточно высокой мощностью при возможности использования ручных вычислений.

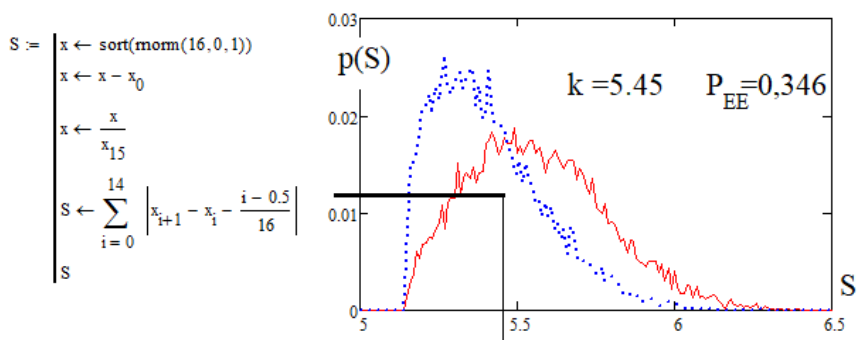


Рис. 1.11. Критерий Шермана (1950) [13]

В разделе 1.4 было показано, что, объединяя критерии в группы, важно следить за тем, чтобы они имели близкие друг к другу вероятности ошибок. По этому показателю критерий Шермана попадает в группу критериев $\{\chi^2, KfM, KS, SKfM\}$, соответственно, в своей группе он дает следующие значения коэффициентов корреляции $\{-0.141, 0.057, 0.371, 0.483\}$, т.е. критерий Шермана имеет низкие показатели корреляционной связанности внутри своей группы.

1.10. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Раньи

Усилиями Раньи в 1953 г. удалось улучшить характеристики критерия Колмогорова – Смирнова [14]. Раньи смог снизить вероятности ошибок нового критерия примерно на 14 %, сохранив общую структуру использованных преобразований. Новый критерий R по вероятности появления ошибок близок к группе критериев $\{\chi^2, KfM, KS, SKfM, S\}$. Для критериев своей группы он дает следующие значения коэффициентов корреляции: $\{0.049, 0.081, 0.298, 0.397, 0.619\}$.

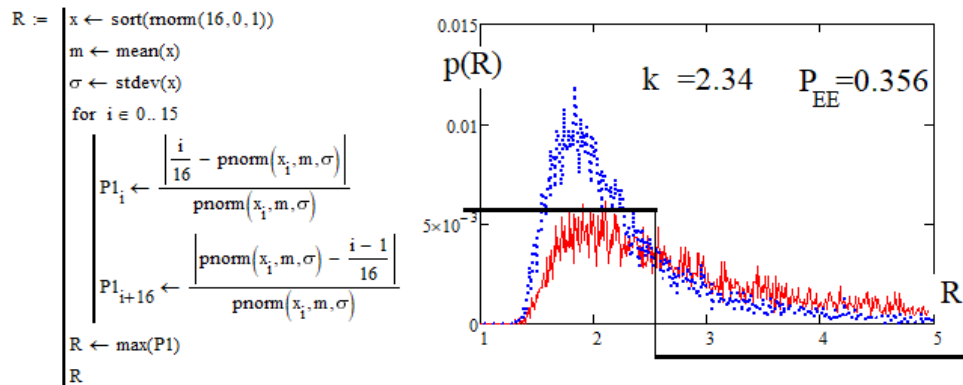


Рис. 1.12. Критерий Раньи (1953) [14]

1.11. Искусственный нейрон, построенный на критерии Андерсона – Дарлингга

По мере роста возможностей ламповых ЭВМ исследователи стали осознавать положительный потенциал усложнения вычислений. При этом усложнение вычислений далеко не всегда приводило к успеху. В середине 1950-х гг. условия сохранения устойчивости вычислений были слабо исследованы. Одной из удачных реализаций усложнения вычислений стал критерий, предложенный Андерсоном и Дарлинггом [15]. Этот критерий интересен тем, что так же, как критерий Смирнова – Крамера – фон Мизеса (SKfM), ориентирован на использование двух статистических таблиц, однако обладает гораздо более высокой мощностью (рис. 1.13).

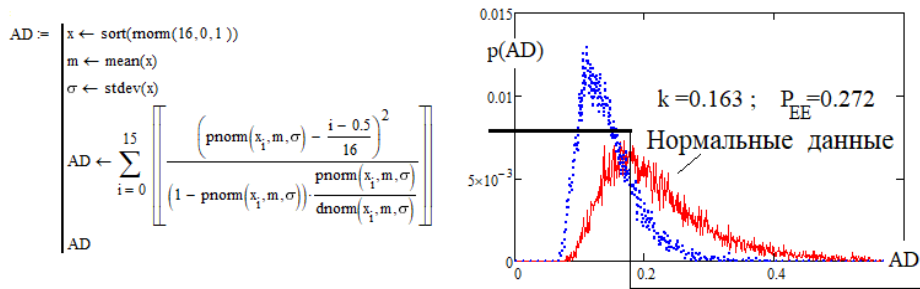


Рис. 1.13. Нейрон эквивалентный статистическому критерию Андерсона – Дарлинга (1954) [15]

По значению вероятности появления ошибок критерий AD близок к группе критериев $\{\mu_4, NB, Rs, V_5\}$. Внутри этой группы критерий AD имеет следующие показатели коэффициентов корреляции: $\{0.113, 0.3, -0.102, -0.120\}$.

1.12. Искусственный нейрон нормированного размаха Девида – Хартли – Пирсона

Простота статистических вычислений была особенно актуальна в 20-х гг. прошлого века. В это время были выполнены первые работы по фрактальной статистике (статистике дробных показателей числа степеней свободы того или иного случайного процесса). Пионером в этом направлении исследований был англичанин Херст [16], который занимался предсказанием разливов реки Нил в Египте. Видимо, Херст первым стал использовать показатель нормированного размаха Rs.

Глубокое исследование свойств критерия нормированного размаха выполнили Дэвид Хартли и Пирсон [17] в 1954 г. Они показали очень высокий потенциал видимой «простоты». Очень простой в вычислительном отношении критерий оказался сопоставим по его эффективности со сложными в вычислительном отношении критериями, позднее созданными для ЭВМ (рис. 1.14).

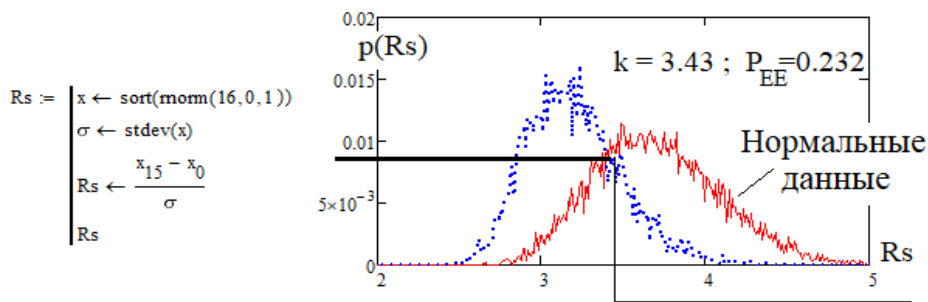


Рис. 1.14. Нейрон Девида – Хартли – Пирсона эквивалентный статистическому критерию нормированного размаха (1954) [17]

Критерий нормированного размаха R_s по своему значению вероятностей ошибок попадает в группу критериев $\{\mu_4, W, V_5, E_m\}$, имеющих следующие показатели коэффициентов корреляции: $\{0.829, 0.162, -0.919, 0.808\}$. К сожалению, критерий нормированного размаха R_s имеет сильные корреляционные связи в своей группе.

1.13. Искусственный нейрон, соответствующий интегральному критерию Ватсона

Из основ математики известно, что численное дифференцирование усиливает ошибки из-за шумов округления, а численное интегрирование, напротив, приводит к подавлению шумов. Интегрирование является более устойчивой в вычислительном отношении операцией в сравнении с разностными операциями дифференцирования. Этот тезис подтвердил Ватсон [18] в 1961 г. на своем критерии, построенном на двойном интегрировании. Все, приведенные выше статистические критерии, следует рассматривать как критерии однократного интегрирования, соответственно, переход Ватсона к двойному интегрированию позволил ему снизить вероятности ошибок примерно в полтора раза (рис. 1.15).

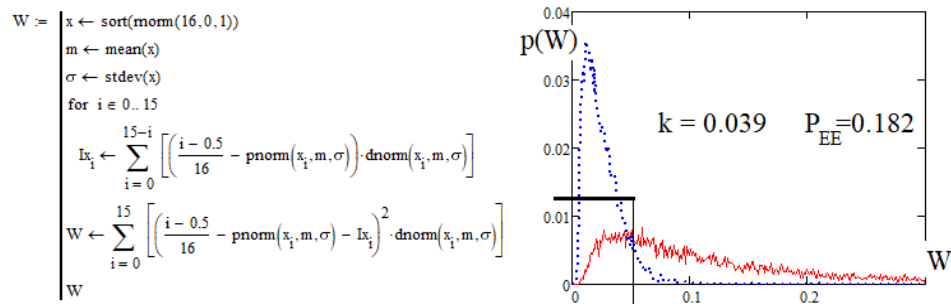


Рис. 1.15. Критерий Ватсона (1961) [18]

Критерий Ватсона W по значению вероятностей ошибок следует отнести к группе наиболее мощных классических критериев $\{R_s, G, ASR\}$. Эта группа имеет следующие значения коэффициентов корреляции: $\{0.162, 0.755, 0.146\}$.

1.14. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Шапиро – Уилка

В течение всего XX в. исследователи параллельно занимались как дифференциальными, так и интегральными критериями. В частности, к дифференциальным критериям следует отнести критерий Шапиро и Уилка, созданный ими в 1965 г. [19]. Мощность критерия HU

сопоставима с мощностью интегрального критерия Смирнова – Крамера – фон Мизеса. Добиться этого удалось за счет подбора весовых коэффициентов при суммировании. Это один из часто используемых приемов повышения устойчивости вычислений (рис. 1.16).

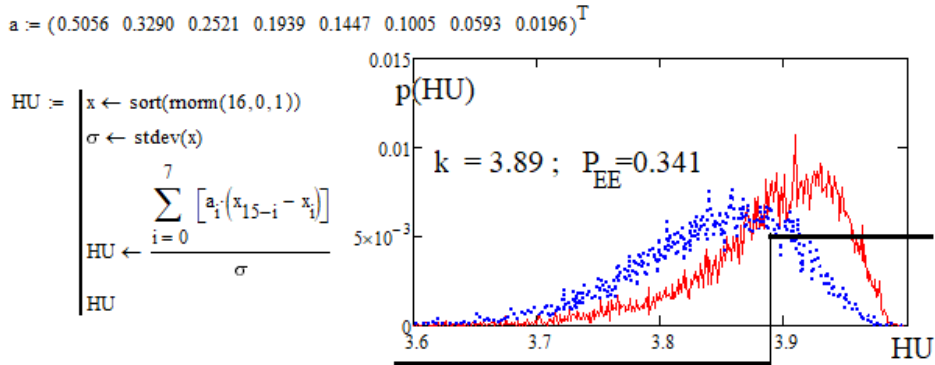


Рис. 1.16. Нейрон эквивалентный статистическому критерию Шапиро – Уилка (1965) [19]

По вероятности появления ошибок этот критерий следует отнести к группе критериев $\{\chi^2, KfM, SKfM, S\}$ с коэффициентами парной корреляции $\{-0.678, -0.662, -0.502, -0.597\}$. К сожалению, эта группа критериев имеет сильные корреляционные связи.

1.15. Искусственный нейрон, соответствующий критерию максимальной разности между соседними отсчетами

Тезис о высоком потенциале статистических критериев, построенных на дифференцировании данных, подтверждает работоспособность двух критериев семейства Смирнова – Колмогорова. Ниже на рис. 1.17 приведены данные критерия максимального интервала между соседними отсчетами упорядоченной выборки [20].

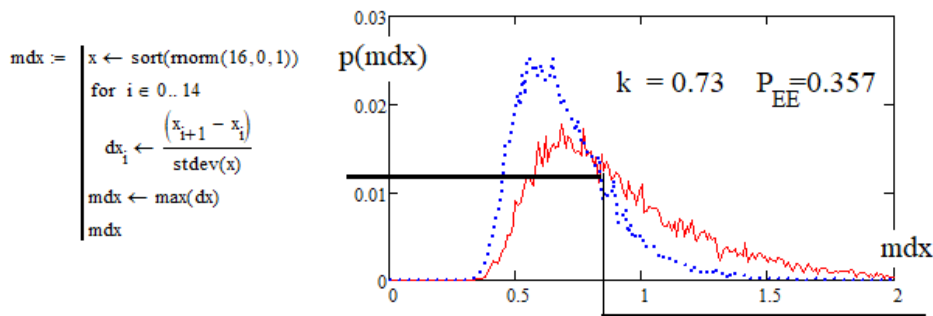


Рис. 1.17. Критерий максимального интервала между отсчетами (1965) [20]

Этот критерий по вероятностям ошибок попадает в группу критериев $\{\chi^2, KfM, SKfM, S\}$ с коэффициентами парной корреляции $\{-0.091, -0.158, -0.391, -0.322\}$. Модули коэффициентов корреляции малы, соответственно, критерий mdx может быть использован в этой группе.

1.16. Искусственный нейрон, воспроизводящий работу критерия максимального отклонения от центра распределения малой выборки

На рис. 1.18 приведены данные критерия максимального отклонения крайних отсчетов от центра выборки. Положительными свойствами этого критерия являются его простота и высокая мощность. Вероятности появления ошибок первого и второго рода $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.265$ оказываются меньше примерно на 30 % по сравнению с интегральным критерием Раньи (см. рис. 1.10).

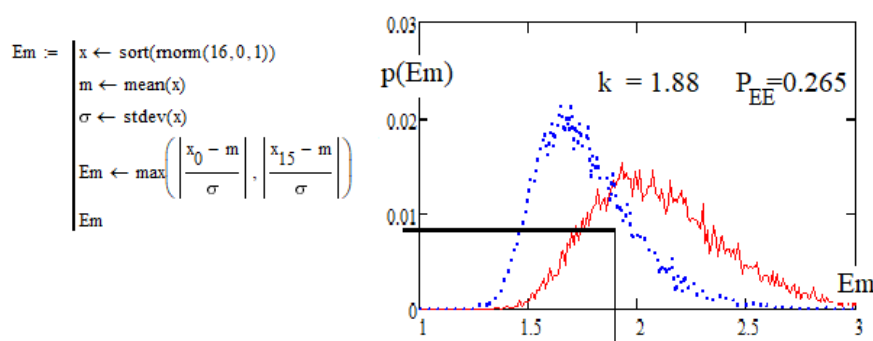


Рис. 1.18. Критерий максимального отклонения точек от центра (1965) [20]

По сути дела, этот критерий относится к семейству критериев Колмогорова – Смирнова, которое создавалось как поиск максимального отклонения между наблюдаемой функцией вероятности и ее ожидаемыми значениями. Критерий Раньи R и критерий максимальной разности между соседями mdx строятся аналогично, но в разных пространствах. При этом самым мощным оказывается последний статистический критерий Em . По вероятности появления ошибок первого и второго рода он относится к группе критериев $\{\mu_4, NB, AD, Rs\}$. Коэффициенты корреляции между критерием Em и его группой составляют $\{0.922, 0.65, -0.594, 0.808\}$.

1.17. Искусственный нейрон, являющийся аналогом критерия Васичека

Важно отметить, что интегрирование или накопление данных может выполняться в разных пространствах. По сути дела, рассмотренные

выше критерии различаются подынтегральными нелинейными функциями некоторого деформирования пространства входных данных. Само же интегрирование или интегродифференцирование данных выполняется суммированием. Суммирование в первом приближении можно рассматривать как линейное накапливание данных в нелинейном пространстве. При этом нам известно, что наряду с вычислением математического ожидания суммированием (среднего математического) примерно такими же свойствами обладают иные операции накопления. Например, это могут быть операции вычисления среднего геометрического.

В этом отношении значительный интерес представляет критерий Васичека, относящийся к дифференциальным критериям с усреднением данных в пространстве среднего геометрического. Несмотря на программную простоту реализации этого критерия, его мощность оказывается сопоставимой с лучшими критериями, полученными привычным для инженеров суммированием (рис. 1.19).

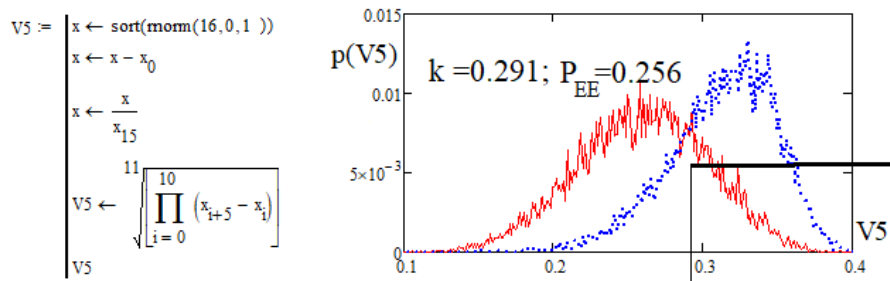


Рис. 1.19. Нейрон эквивалентный статистическому критерию Васичека (1976) [21]

По достигнутым этим критерием вероятностям появления ошибок он относится к группе критериев $\{\mu_4, NB, AD, Rs, Em\}$. Для этой группы показатели коэффициентов корреляции составляют $\{-0.876, -0.494, -0.12, -0.919, -0.842\}$.

1.18. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Локка – Спурье

Выше по тексту были приведены критерии $\{HU, mdx, V5\}$, полученные дифференцированием входных данных первого порядка, не трудно предположить, что следующим этапом будет исследование возможного применения дифференциалов второго порядка. Видимо, первым эффективным критерием этого семейства является критерий Локка – Спурье [22]. Он построен на вычислении разностей второго порядка, сдвинутых по отношению к центральному элементу разностей. Это один из вариантов численной оценки второй производной. Программный код и результаты численного моделирования приведены на рис. 1.20.

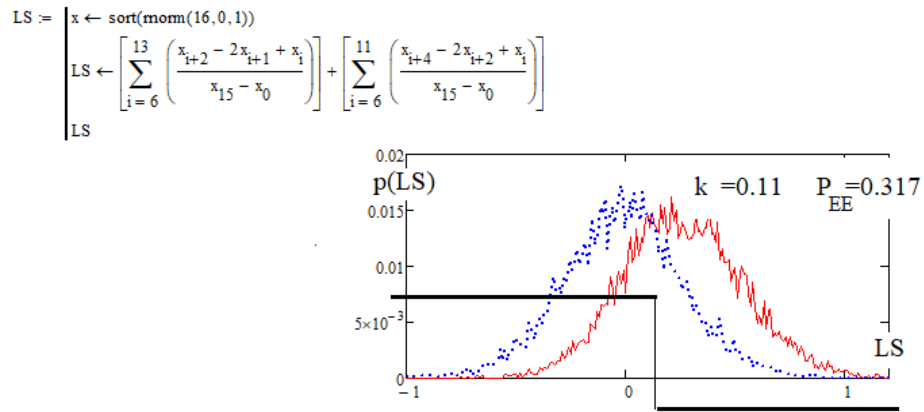


Рис. 1.20. Критерий Локка – Спурье (1976) [22]

Несмотря на то, что оценки второй производной менее устойчивы по отношению к шумам малых выборок, критерий LS оказался достаточно устойчивым. Его мощность для решаемой нами задачи оказалась выше двух предшествующих критериев {HU, mdx}, построенных на численных оценках разностей первого порядка.

По значению вероятности появления ошибок критерий LS близок к группе критериев {SKfM, χ^2 , AD}. Коэффициенты взаимной корреляции в этой группе составляют {−0.461, 0.013, 0.064}.

1.19. Искусственный нейрон, созданный на основе критерия Фроцини

Следующим критерием, заслуживающим внимания, является критерий Фроцини 1978 г. [23]. Это хороший пример того, как упрощения вычислений могут приводить к повышению мощности критерия. Фроцини фактически исключил операцию возведения в квадрат при вычислении критерия Смирнова – Крамера – фон Мизеса. Операция возведения в квадрат была заменена более простым вычислением модулей. При этом мы наблюдаем ощутимое снижение вероятностей ошибок первого и второго рода на 35 % (рис. 1.21).

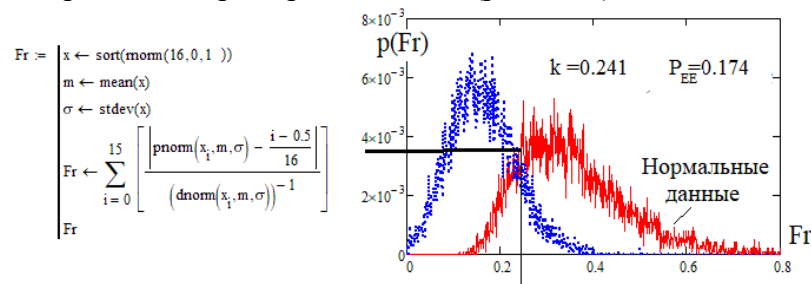


Рис. 1.21. Нейрон эквивалентный статистическому критерию Фроцини (1978) [23]

По своей вероятности равных ошибок первого и второго рода критерий Fr близок к группе критериев {V5, Em, Rs, AD, NB}. Коэффициенты парной корреляции составляют вектор {-0.21, 0.164, 0.92, 0.64, 0.917, 0.24}.

1.20. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Муроты – Такеучи

В силу того, что функции, деформирующие пространство линейного накопления (суммирования), могут быть достаточно экзотическими, вызывает интерес их реально проверенное многообразие. В этом отношении интересен критерий Муроты – Такеучи (1981), в рамках своих исследований его авторы показали возможность применения почти ортогональных тригонометрических полиномов (рис. 1.22).

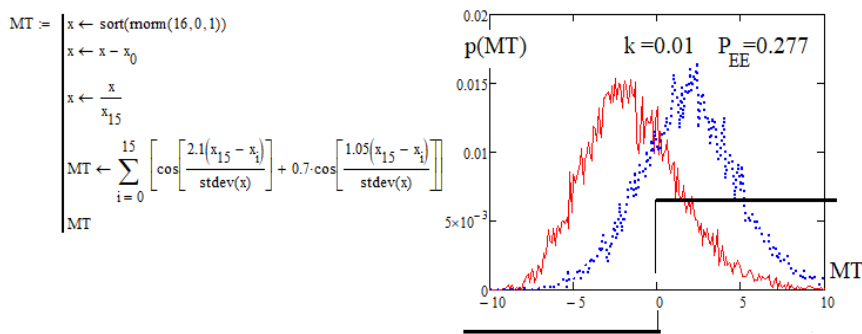


Рис. 1.22. Критерий Мурота – Такеучи (1981) [24]

Получается, что критерий Неймана – Пирсона (1937) был построен на ортогональных полиномах Лежандра, а через 50 лет Мурота и Такеучи [24] подтвердили возможность замены конечных степенных полиномов Лежандра на тригонометрические полиномы.

По своей вероятности равных ошибок первого и второго рода критерий MT близок к группе критериев {Fr, V5, Em, Rs, AD, NB, μ_4 }. Коэффициенты корреляции между MT и критериями группы составляют {0.132, -0.285, -0.364, -0.693, -0.352, 0.029, -0.411}.

1.21. Искусственный нейрон, построенный как эквивалент критерия Лоулеса

Следующий критерий Лоулеса [25] интересен тем, что это первая попытка воспользоваться накоплением данных в пространстве среднего гармонического (рис. 1.23). Получился гибрид среднего геометрического (произведение входных данных с извлечением корня

этого же порядка) с его делением на математическое ожидание (на данные, накопленные линейным суммированием).

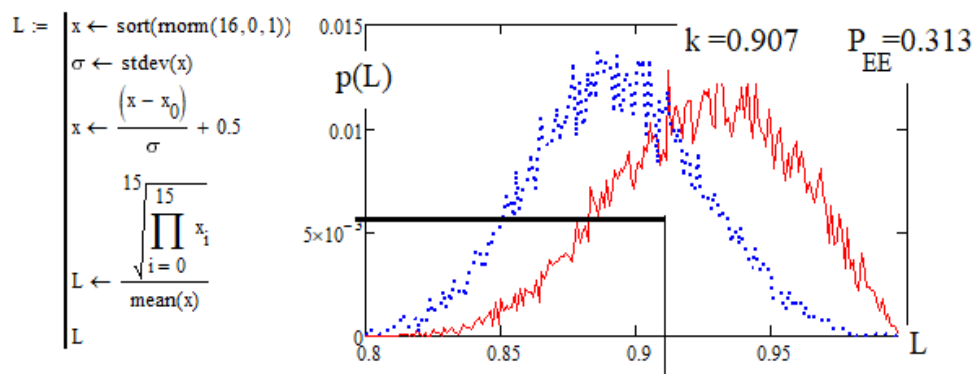


Рис. 1.23. Критерий Лоулеса (1982) [25]

При этом получается простая для программирования математическая конструкция, перспективная для использования при защите вычислений сетями искусственных нейронов среднего гармонического.

1.22. Искусственный нейрон, соответствующий критерию Али – Черго – Ревиса

Одной из основных целей, на которую ориентировались все исследователи прошлого века, являлось снижение вероятности ошибок первого и второго рода. В этом контексте наиболее мощным является критерий Али – Черго – Ревиса 1992 г. [26] (рис. 1.24).

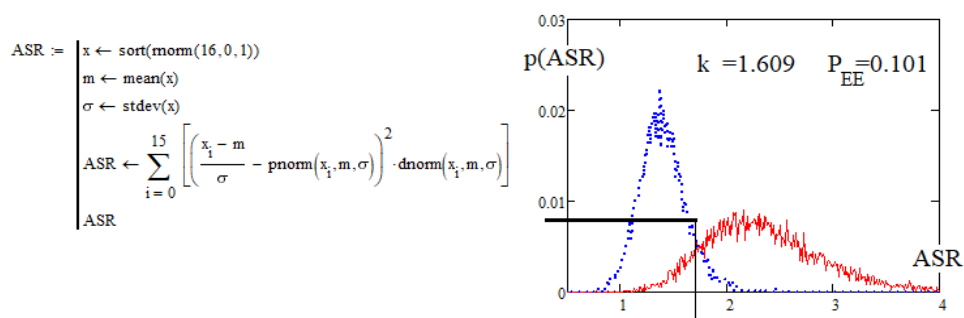


Рис. 1.24. Критерий Али – Черго – Ревиса (1992) [26]

Критерий ASR должен использоваться совместно с группой наиболее мощных статистических критериев $\{G, W\}$. Ниже приведена полная таблица коэффициентов парной корреляции между откликами рассмотренных выше статистических критериев (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Коэффициенты корреляции откликов классических статистических критериев

	1900	1928	1930	1933	1935	1936	1937	1950	1952	1953	1954	1961	1965	1965	1965	1976	1976	1976	1978	1981	1982	1992	
	χ^2	KFM	μ^4	KS	G	SKFM	NB	S	AD	R	R _s	W	HU	mdx	Em	V ₅	LS	Fr	MT	L	ASR		
1	χ^2	1	.562	-.087	.445	.257	.352	-.141	.466	.049	-.402	.083	-.678	-.091	-.150	.184	.013	.248	.454	.348	.041	χ^2	
2	KFM		1	-.08	.415	.424	.485	.057	.581	.081	-.339	.146	-.662	-.158	-.127	.088	-.206	.402	.597	-.099	-.006	KFM	
3	μ^4			1	.051	.073	.190	.431	.113	.559	.829	.254	-.355	.145	.922	-.876	.007	.195	-.411	.457	-.211	μ^4	
4	KS				1	.467	.769	.371	.740	.298	-.113	.367	-.538	-.372	.007	-.093	-.420	.569	.302	.203	-.290	KS	
5	G					1	.818	.316	.899	.250	-.054	.755	-.359	-.265	.047	-.083	-.345	.948	.220	.189	.410	G	
6	SKFM						1	.483	.951	.397	.015	.731	-.502	-.391	.151	-.212	-.463	.931	.224	.320	-.118	SKFM	
7	NB							1	.300	.395	.315	.223	-.691	.036	.650	-.494	-.007	.240	.029	.067	-.139	NB	
8	S								.368	.619	.464	.367	-.027	-.322	.411	-.485	-.836	.461	-.076	.897	-.424	S	
9	AD								1	.321	-.102	-.110	-.597	.708	-.594	-.120	.064	.917	.352	.186	.132	AD	
10	R									1	.382	.321	-.286	-.204	.490	-.395	-.502	.359	-.081	.534	-.292	R	
11	R _s										1	.162	.141	.171	.808	-.919	-.916	.064	-.693	.638	-.211	R _s	
12	W											1	-.220	-.200	.212	-.240	-.290	.802	-.007	.288	.146	W	
13	HU												1	.069	-.256	.146	.010	-.374	-.480	.212	.026	HU	
14	mdx													1	.112	-.174	.489	-.336	-.267	-.235	.226	mdx	
15	Em														1	-.842	.007	.164	-.364	.455	-.196	Em	
16	LS															1	-.005	-.212	.571	-.567	.227	LS	
17	V ₅																1	-.210	-.285	-.710	.347	V ₅	
18	Fr																	1	.132	.332	.128	Fr	
19	MT																		1	-.0227	.078	MT	
20	L																			1	-.386	L	
21	ASR																				1	ASR	
	χ^2																						
	KFM																						
	μ^4																						
	KS																						
	G																						
	SKFM																						
	NB																						
	S																						
	AD																						
	R																						
	R _s																						
	W																						
	HU																						
	mdx																						
	Em																						
	LS																						
	V ₅																						
	Fr																						
	MT																						
	L																						
	ASR																						
	χ^2																						
	KFM																						
	μ^4																						
	KS																						
	G																						
	SKFM																						
	NB																						
	S																						
	AD																						
	R																						
	R _s																						
	W																						
	HU																						
	mdx																						
	Em																						
	LS																						
	V ₅																						
	Fr																						
	MT																						
	L																						
	ASR																						

Малые выборки в 16 опытов

СИНТЕЗ НОВЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ НАЧАЛА XXI в. ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ НОРМАЛЬНОГО И РАВНОМЕРНОГО ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАННЫХ МАЛЫХ ВЫБОРОК

2.1. Новые искусственные нейроны, построенные на базе классических статистических критериев, отображенных в пространство дифференциальных входных данных

2.1.1. Дифференциальный вариант критерия Крамера – фон Мизеса

Отметим, что в теории статистической обработки данных [3] хорошо изучены классические критерии. В частности, критерий Крамера – фон Мизеса построен на сравнении теоретической и экспериментальной функции вероятности:

$$KfM = \int_{-\infty}^{\infty} (P(x) - \tilde{P}(x))^2 dx, \quad (2.1)$$

где $P(x)$ – ожидаемая, теоретическая функция вероятности; $\tilde{P}(x)$ – экспериментально наблюдаемая функция вероятности.

Очевидно, что по аналогии с формулой (2.1) мы можем построить дифференциальный аналог критерия Крамера – фон Мизеса [27, 28], сравнивая между собой теоретическую и экспериментальную и плотности распределения значений:

$$dKfM = \int_{-\infty}^{\infty} (p(x) - \tilde{p}(x))^2 dx, \quad (2.2)$$

где $p(x) = \frac{dP(x)}{dx}$, $\tilde{p}(x) = \frac{d\tilde{P}(x)}{dx}$.

Программное обеспечение и результаты соответствующего численного эксперимента приведены на рис. 2.1.

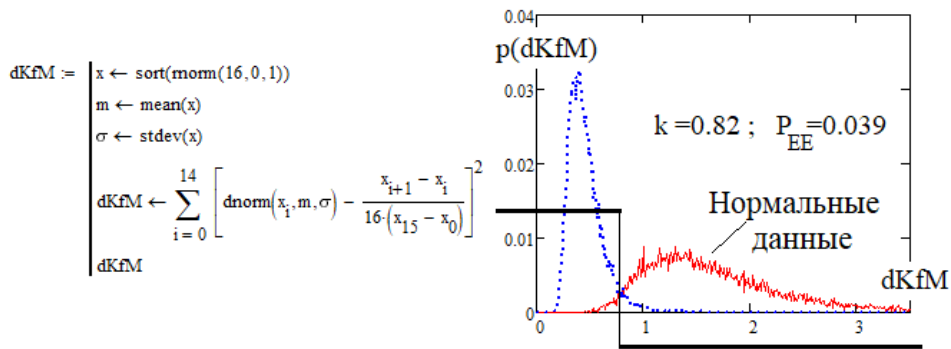


Рис. 2.1. Нейрон дифференциального аналога критерия Крамера – фон Мизеса (2016) [27]

При переходе от классической KfM конструкции к ее дифференциальному аналогу dKfM мы наблюдаем скачок мощности нового дифференциального критерия примерно в 9 раз [28]. Дополнительным преимуществом перехода из обычного пространства в дифференциальное при обогащении данных является значительное снижение корреляционных связей dKfM с группой классических критериев {KfM, χ^2 , SKfM, KS}. Модули коэффициентов корреляции снижаются более чем на порядок {-0.075, -0.01, 0.055, -0.157}:

Корреляционные связи с классическими критериями

$\text{corr}(KfM, dKfM) = -0.04$	$\text{corr}(G, dKfM) = 0.409$	$\text{corr}(dKfM, \mu_4) = -0.019$	$\text{corr}(dKfM, KS) = -0.149$
$\text{corr}(\chi^2, dKfM) = 0.0179$	$\text{corr}(dKfM, \chi^2) = 0.0179$	$\text{corr}(dKfM, Rs) = -0.0207$	$\text{corr}(dKfM, S) = -0.2441$
$\text{corr}(dKfM, SKfM) = 0.056$	$\text{corr}(dKfM, AD) = 0.202$	$\text{corr}(dKfM, HU) = -0.0038$	$\text{corr}(dKfM, S) = -0.2441$
$\text{corr}(dKfM, KS) = -0.1487$	$\text{corr}(dKfM, Fr) = 0.2445$	$\text{corr}(dKfM, V5) = 0.017$	$\text{corr}(dKfM, W) = 0.2561$
$\text{corr}(dKfM, MT) = -0.0561$	$\text{corr}(dKfM, MT) = -0.0561$	$\text{corr}(dKfM, KS) = -0.1487$	$\text{corr}(dKfM, Em) = -0.0186$

2.1.2. Искусственный нейрон, являющийся дифференциальным аналогом критерия Колмогорова – Смирнова

Критерий Колмогорова – Смирнова относится к интегральным, так как построен на оценке модуля разности экспериментальной и ожидаемой функций вероятности. Очевидно, что интегральные функции вероятности могут быть заменены на их дифференциальные аналоги. На рис. 2.2 приведено программное обеспечение моделирования новой модификации статистического критерия и результат численного моделирования.

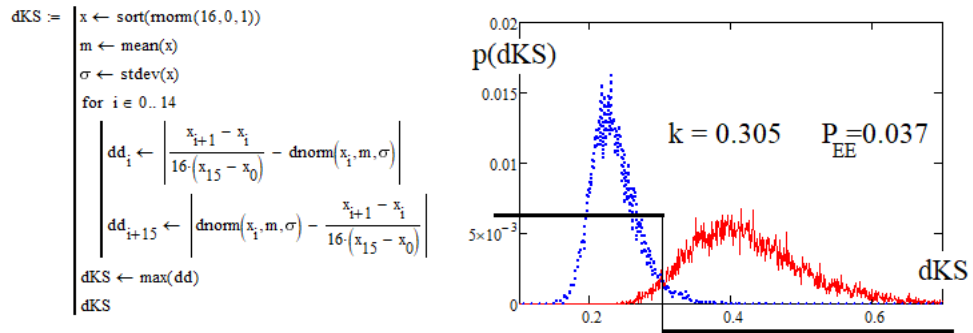


Рис. 2.2. Искусственный нейрон, эквивалентный дифференциальному аналогу критерия Колмогорова – Смирнова (2022) [29]

Базовый интегральный критерий KS считается низко эффективным, так как вероятности появления ошибок этого критерия составляют 0.404. Из рис. 2.2 видно, что вероятность ошибок нового критерия снижается до значения 0.037. Мы наблюдаем снижение вероятности появления ошибок в 11 раз при накоплении входных данных в разных пространствах. При этом корреляционная связанность критерия dKS с классическими статистическими критериями {MT, mdx, LS, KS} так же оказывается низкой {−0,019, 0.013, 0.026, −0.029}:

Корреляционные связи с классическими критериями

$\text{corr}(dKS, KfM) = -0.014$	$\text{corr}(dKS, G) = 0.747$	$\text{corr}(dKS, \mu_4) = 0.02$	$\text{corr}(dKS, R) = 0.0071$
$\text{corr}(dKS, \chi^2) = 0.00288$	$\text{corr}(dKS, \chi^2) = 0.0029$	$\text{corr}(dKS, R_s) = 0.0142$	$\text{corr}(dKS, S) = -0.0106$
$\text{corr}(dKS, SKfM) = 0.337808$	$\text{corr}(dKS, AD) = 0.4815$	$\text{corr}(dKS, HU) = -0.0054$	$\text{corr}(dKS, L) = -0.0046$
$\text{corr}(dKS, KS) = -0.0024$	$\text{corr}(dKS, Fr) = 0.5804$	$\text{corr}(dKS, V5) = -0.0124$	$\text{corr}(dKS, W) = 0.5852$
$\text{corr}(dKS, MT) = -0.0151$	$\text{corr}(dKS, mdx) = 0.0092$	$\text{corr}(dKS, KS) = -0.0024$	$\text{corr}(dKS, Em) = 0.0095$

2.1.3. Искусственный нейрон, являющийся дифференциальным аналогом критерия Смирнова – Крамера – фон Мизеса

Континуальный критерий Смирнова – Крамера – фон Мизеса описывается следующим интегральным уравнением:

$$SKfM = \int_{-\infty}^{\infty} (P(x) - \tilde{P}(x))^2 \cdot p(x) \cdot dx. \quad (2.3)$$

Заменяя в уравнении (2.3) интегральные функции вероятности на их дифференциальные аналоги, мы получим дифференциальный вариант нового статистического критерия:

$$dSKfM = \int_{-\infty}^{\infty} (p(x) - \tilde{p}(x))^2 \cdot p(x) \cdot dx. \quad (2.4)$$

Переход к малым выборкам в 16 опытов позволяет выполнить численное моделирование поведения нового статистического критерия – dSKfM. На рис. 2.3 представлены результаты численного эксперимента.

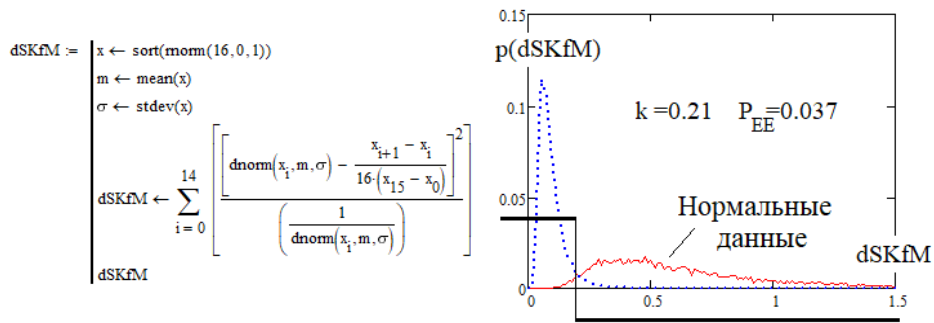


Рис. 2.3. Нейрон дифференциального аналога классического критерия Смирнова – Крамера – фон Мизеса (2016) [27, 28, 30]

При переходе от базового критерия SKfM к его новому дифференциальному аналогу dSKfM позволяет снизить вероятности ошибок с уровня 0.323 до уровня 0.037 в 8,7 раза. Дополнительно снижается общий уровень значений модулей коэффициентов корреляции критерия dSKfM с классическими критериями {KfM, χ^2 , SKfM, KS} до значений $\{-0.034, 0.005, -0.034, -0.117\}$:

Корреляционные связи с классическими критериями

corr(dSKfM, KfM) = -0.058	corr(dSKfM, G) = 0.696	corr(dSKfM, μ_4) = 0.145	corr(dSKfM, R) = 0.0475
corr(dSKfM, LS) = 0.008	corr(dSKfM, χ^2) = -0.042	corr(dSKfM, Rs) = 0.1463	corr(dSKfM, S) = 0.0715
corr(dSKfM, SKfM) = 0.3272	corr(dSKfM, AD) = 0.4411	corr(dSKfM, HU) = 0.0053	corr(dSKfM, L) = 0.0829
corr(dSKfM, KS) = -0.0191	corr(dSKfM, Fr) = 0.5654	corr(dSKfM, V5) = -0.1561	corr(dSKfM, W) = 0.6805
corr(dSKfM, MT) = -0.1192	corr(dSKfM, mdx) = 0.0486	corr(dSKfM, KS) = -0.0191	corr(dSKfM, Em) = 0.125

2.1.4. Искусственный нейрон, являющийся дифференциальным аналогом критерия Андерсона – Дарлинга

Континуальная форма критерия Андерсона – Дарлинга во многом повторяет такую же форму критерия Смирнова – Крамера – фон Мизеса. Отличие состоит в появлении числителя подынтегральной дроби:

$$AD = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(P(x) - \tilde{P}(x))^2}{P(x) \cdot (1 - P(x))} \cdot p(x) \cdot dx. \quad (2.5)$$

Континуальная дифференциальная форма критерия Андерсона – Дарлинга получается заменой в числителе (2.5) функций вероятности на функции плотностей вероятности:

$$dAD = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p(x) - \tilde{p}(x))^2}{P(x) \cdot (1 - P(x))} \cdot p(x) \cdot dx. \quad (2.6)$$

Переход к малым выборкам в 16 опытов позволяет выполнить численное моделирование поведения нового статистического критерия dAD. На рис. 2.4 представлены результаты численного эксперимента.

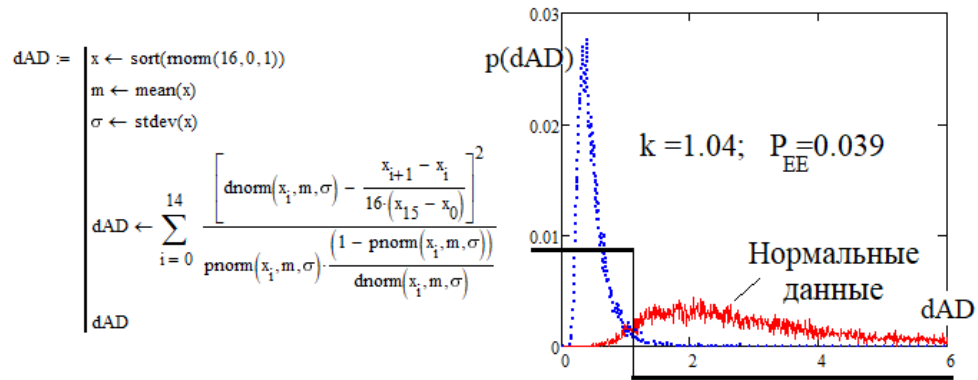


Рис. 2.4. Искусственный нейрон дифференциального аналога критерия Андерсона – Дарлинга (2016) [27, 28, 30]

При переходе от базового критерия AD к его новому дифференциальному аналогу dAD позволяет снизить вероятности ошибок с уровня 0.272 до уровня 0.039 в 8 раз. Дополнительно снижается общий уровень значений модулей коэффициентов корреляции критерия dAD с классическими критериями {KfM, χ^2 , SKfM, KS, AD} до значений {−0.033, −0.0005, 0.164, −0.096, 0.31}:

Корреляционные связи с классическими критериями

$\text{corr}(dAD, KfM) = -0.016$	$\text{corr}(dAD, G) = 0.543$	$\text{corr}(dAD, \mu4) = -0.012$	$\text{corr}(dAD, R) = -0.1065$
$\text{corr}(dAD, LS) = 0.1893$	$\text{corr}(dAD, \chi^2) = 0.019$	$\text{corr}(dAD, Rs) = -0.0181$	$\text{corr}(dAD, S) = -0.1684$
$\text{corr}(dAD, SKfM) = 0.1565$	$\text{corr}(dAD, AD) = 0.3114$	$\text{corr}(dAD, HU) = -0.0106$	$\text{corr}(dAD, L) = -0.1555$
$\text{corr}(dAD, KS) = -0.0993$	$\text{corr}(dAD, Fr) = 0.3701$	$\text{corr}(dAD, V5) = 0.0118$	$\text{corr}(dAD, W) = 0.399$
$\text{corr}(dAD, MT) = -0.0338$	$\text{corr}(dAD, mdx) = 0.3968$	$\text{corr}(dAD, KS) = -0.0993$	$\text{corr}(dAD, Em) = -0.0145$

2.1.5. Искусственный нейрон, являющийся дифференциальным аналогом критерия Фроцини

Критерий Фроцини является упрощением критерия Смирнова – Крамера – фон Мизеса. Формально для перехода от одного критерия к другому необходимо операцию возведения в квадрат в формуле (2.3) заменить вычислением модуля

$$Fr = \int_{-\infty}^{\infty} |P(x) - \tilde{P}(x)| \cdot p(x) \cdot dx. \quad (2.7)$$

Для перехода к новому критерию необходимо заменить интегральные функции вероятности на их дифференциальные аналоги:

$$dFr = \int_{-\infty}^{\infty} |p(x) - \tilde{p}(x)| \cdot p(x) \cdot dx. \quad (2.8)$$

Моделирование статистического критерия может быть выполнено программой на языке MathCAD, представленной в левой части рис. 2.5.

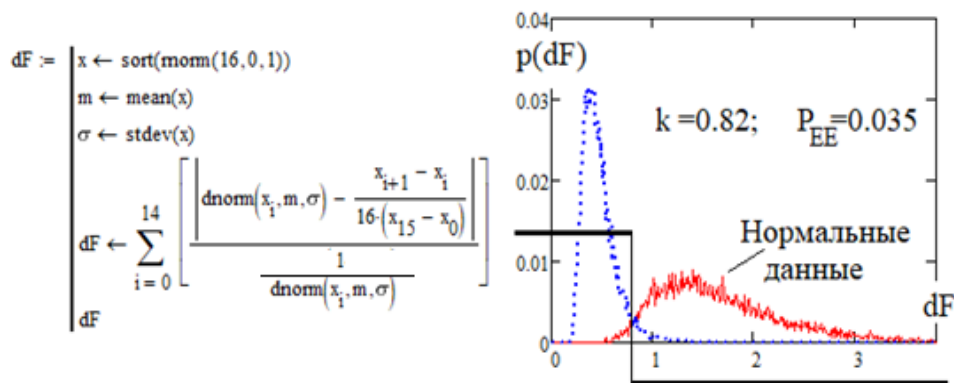


Рис. 2.5. Нейрон дифференциального аналога критерия Фроцини (2016) [27, 28, 30]

Переход от исходного критерия к новому дает уменьшение вероятности ошибок в 7,3 раза. Значения модулей коэффициентов корреляции критерия dFr с классическими критериями $\{KfM, \chi^2, SKfM, KS, Fr\}$ снижаются до значений $\{-0.049, -0.003, 0.075, -0.14, 0.27\}$:

Корреляционные связи с классическими критериями

$\text{corr}(\text{KfM}, \text{dFr}) = -0.039$	$\text{corr}(G, \text{dFr}) = 0.417$	$\text{corr}(\text{dFr}, \mu_4) = -0.015$	$\text{corr}(\text{dFr}, \text{KS}) = -0.137$
$\text{corr}(\chi^2, \text{dFr}) = 0.014406$	$\text{corr}(\text{dFr}, \chi^2) = 0.0144$	$\text{corr}(\text{dFr}, \text{Rs}) = -0.0151$	$\text{corr}(\text{dFr}, S) = -0.2197$
$\text{corr}(\text{dFr}, \text{SKfM}) = 0.0703$	$\text{corr}(\text{dFr}, \text{AD}) = 0.2115$	$\text{corr}(\text{dFr}, \text{HU}) = -0.001$	$\text{corr}(\text{dFr}, S) = -0.2197$
$\text{corr}(\text{dFr}, \text{KS}) = -0.1366$	$\text{corr}(\text{dFr}, \text{Fr}) = 0.2569$	$\text{corr}(\text{dFr}, \text{V5}) = 0.0124$	$\text{corr}(\text{dFr}, \text{W}) = 0.2648$
$\text{corr}(\text{dFr}, \text{Fr}) = 0.256899$	$\text{corr}(\text{dFr}, \text{MT}) = -0.0542$	$\text{corr}(\text{dFr}, \text{KS}) = -0.1366$	$\text{corr}(\text{dFr}, \text{Em}) = -0.0153$

2.1.6. Искусственный нейрон, являющийся дифференциальным аналогом критерия Ватсона

Критерий Ватсона выполнен вычислением двойного интеграла над разностями наблюдаемой и ожидаемой функции вероятности:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ P(x) - \tilde{P}(x) - \int_{-\infty}^x (P(u) - \tilde{P}(u)) du \right\}^2 \cdot p(x) dx. \quad (2.9)$$

Замена функций вероятности на наблюдаемую и реальную плотности распределения значений позволяет получить новый статистический критерий:

$$dW = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p(x) - \tilde{p}(x) - \int_{-\infty}^x (p(u) - \tilde{p}(u)) du \right\}^2 \cdot p(x) dx. \quad (2.10)$$

Программное обеспечение для моделирования нового критерия и результаты численного моделирования приведены на рис. 2.6.

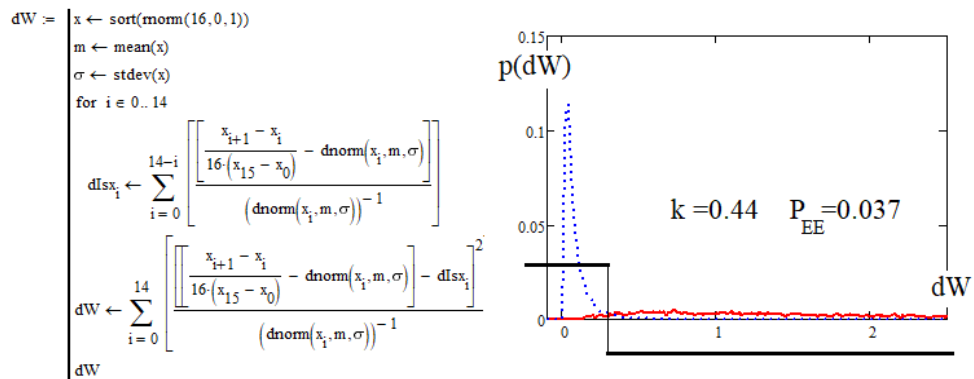


Рис. 2.6. Дифференциальный вариант интегрального критерия Ватсона

Переход от базового критерия Ватсона к его дифференциальному варианту позволяет снизить вероятность появления ошибок первого и второго рода в 4,9 раза. Значения модулей коэффициентов корреляции критерия dW с классическими критериями $\{KfM, \chi^2, SKfM, KS, W\}$ снижаются до значений $\{-0.025, -0.015, 0.257, -0.012, 0.614\}$.

Таким образом, получается, что переходя из пространства анализа интегральных функций вероятности в пространство анализа их производных (плотностей распределения значений ожидаемой и наблюдаемой), мы способны синтезировать ряд новых дифференциальных статистических критериев, обладающих мощностью от 4 до 11 раз более высокой. Этот эффект мы наблюдаем при решении задачи нейросетевого разделения малых выборок в 16 опытов. Как будут вести себя новые критерии при попытках их применения для решения иных задач на текущий момент, неизвестно.

Также следует отметить, что новые критерии (например, критерий dW) при использовании их в одиночку уже способны обеспечивать уровень доверительной вероятности 0.963. Этого уже может оказаться вполне достаточно при решении каких-то задач экономики, медицины, биологии, социологии:

Корреляционные связи с классическими критериями

$\text{corr}(dW, KfM) = 0.0099$	$\text{corr}(dW, G) = 0.367$	$\text{corr}(dW, \mu4) = 0.061$	$\text{corr}(dW, R) = 0.0039$
$\text{corr}(dW, LS) = 0.0388$	$\text{corr}(dW, \chi^2) = -0.0052$	$\text{corr}(dW, Rs) = 0.038$	$\text{corr}(dW, S) = -0.0077$
$\text{corr}(dW, SKfM) = 0.1466$	$\text{corr}(dW, AD) = 0.2397$	$\text{corr}(dW, HU) = -0.0419$	$\text{corr}(dW, L) = -0.0015$
$\text{corr}(dW, KS) = -0.0196$	$\text{corr}(dW, Fr) = 0.2758$	$\text{corr}(dW, V5) = -0.0582$	$\text{corr}(dW, W) = 0.4029$
$\text{corr}(dW, MT) = -0.021$	$\text{corr}(dW, mdx) = 0.0238$	$\text{corr}(dW, KS) = -0.0196$	$\text{corr}(dW, Em) = 0.046$

2.1.7. Искусственный нейрон, являющийся дифференциальным аналогом критерия Гири

Критерий Гири дает вероятности ошибок 0.119. Он является одним из самых мощных среди классических критериев. Если мы перейдем к дифференциальному аналогу критерия Гири, то вероятности ошибок снижаются до величины 0.038 (рис. 2.7).

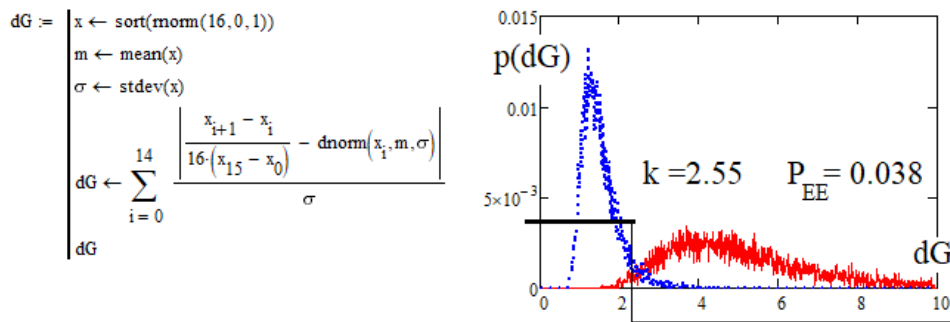


Рис. 2.7. Дифференциальный вариант критерия Гири

Значительное снижение вероятности появления ошибок первого и второго рода, видимо, является следствием перехода к обработке (накоплению) данных малых выборок в дифференциальном пространстве для большинства статистических критериев:

Корреляционные связи с классическими критериями

$\text{corr}(\text{KfM}, dG) = -0.011$	$\text{corr}(G, dG) = 0.737$	$\text{corr}(dG, \mu_4) = 0.083$	$\text{corr}(dG, \text{KS}) = -0.02$
$\text{corr}(\chi^2, dG) = -0.005689$	$\text{corr}(dG, \chi^2) = -0.0057$	$\text{corr}(dG, R_s) = 0.069$	$\text{corr}(dG, S) = 0.0025$
$\text{corr}(dG, \text{SKfM}) = 0.329301$	$\text{corr}(dG, \text{AD}) = 0.4767$	$\text{corr}(dG, \text{HU}) = -0.0245$	$\text{corr}(dG, S) = 0.0025$
$\text{corr}(dG, \text{KS}) = -0.0203$	$\text{corr}(dG, \text{Fr}) = 0.576665$	$\text{corr}(dG, V_5) = -0.081961$	$\text{corr}(dG, W) = 0.6327$
$\text{corr}(dG, \text{MT}) = -0.0583$	$\text{corr}(dG, \text{MT}) = -0.0583$	$\text{corr}(dG, \text{KS}) = -0.0203$	$\text{corr}(dG, \text{Em}) = 0.0697$

2.1.8. Искусственный нейрон, являющийся дифференциальным аналогом критерия Раньи

Классический критерий Раньи позволяет принимать решения с вероятностью ошибок 0.365. Если перейти к дифференциальному аналогу критерия Раньи, то вероятность ошибок снижается до величины 0.064 (рис. 2.8).

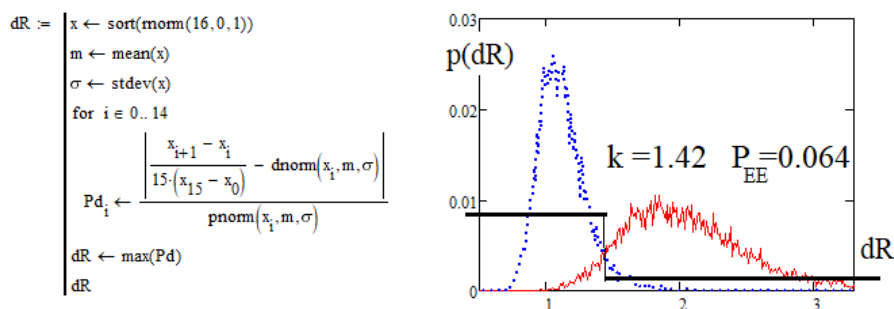


Рис. 2.8. Дифференциальный вариант критерия Раньи

Мы наблюдаем практически шестикратное повышение мощности нового критерия. Кроме того, новый критерий имеет низкий уровень корреляционных связей с классическими критериями:

Корреляционные связи с классическими критериями

$\text{corr}(\text{KfM}, dR) = 0.103$	$\text{corr}(G, dR) = 0.279$	$\text{corr}(dR, \mu_4) = 0.361$	$\text{corr}(dR, \text{KS}) = 0.172$
$\text{corr}(\chi^2, dR) = 0.154952$	$\text{corr}(dR, \chi^2) = 0.155$	$\text{corr}(dR, R_s) = 0.1397$	$\text{corr}(dR, S) = 0.2506$
$\text{corr}(dR, \text{SKfM}) = 0.3117$	$\text{corr}(dR, \text{AD}) = 0.3098$	$\text{corr}(dR, \text{HU}) = -0.2963$	$\text{corr}(dR, S) = 0.2506$
$\text{corr}(dR, \text{KS}) = 0.1718$	$\text{corr}(dR, \text{Fr}) = 0.302$	$\text{corr}(dR, V_5) = -0.1719$	$\text{corr}(dR, W) = 0.3261$
$\text{corr}(dR, \text{MT}) = 0.013$	$\text{corr}(dR, \text{MT}) = 0.013$	$\text{corr}(dR, \text{KS}) = 0.1718$	$\text{corr}(dR, \text{Em}) = 0.2437$

2.1.9. Дифференциальный вариант критерия Али – Черго – Ревиса

Если в классическом варианте критерия Али – Черго – Ревиса выполнить дифференцирование входных данных и заменить функцию вероятности на ее дифференциальный аналог, то мы получим новый статистический критерий. Программная реализация нового критерия и результаты его моделирования приведены на рис. 2.9.

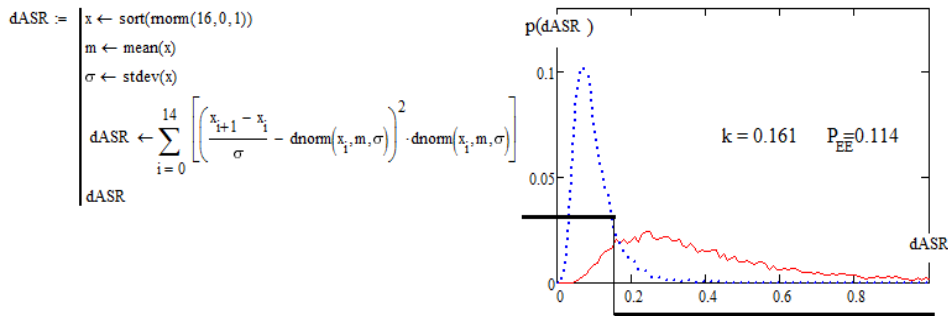


Рис. 2.9. Дифференциальный вариант критерия Али – Черго – Ревиса

Новый критерий имеет слабую корреляционную связь с исходным классическим критерием, а вероятности ошибок этих двух критериев сопоставимы. Модули коэффициентов корреляционных связей с классическими критериями имеют низкий уровень:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

corr(dASR, KfM) = 0.1474	corr(dASR, G) = 0.804	corr(dASR, μ4) = 0.172	corr(dASR, R) = 0.2352
corr(dASR, LS) = -0.3041	corr(dASR, χ2) = 0.1678	corr(dASR, Rs) = 0.0879	corr(dASR, S) = 0.3482
corr(dASR, SKfM) = 0.7988	corr(dASR, AD) = 0.7682	corr(dASR, HU) = -0.2401	corr(dASR, L) = 0.2875
corr(dASR, ASR) = 0.1475	corr(dASR, Fr) = 0.8569	corr(dASR, V5) = -0.1472	corr(dASR, W) = 0.7616
corr(dASR, MT) = 0.0873	corr(dASR, mdx) = -0.3333	corr(dASR, KS) = 0.5199	corr(dASR, Em) = 0.1448

2.1.10. Интегральный вариант критерия Али – Черго – Ревиса

Если заменить дифференцирование входных данных их интегрированием, то мы получим интегральный аналог критерия Али – Черго – Ревиса, представленный на рис. 2.10.

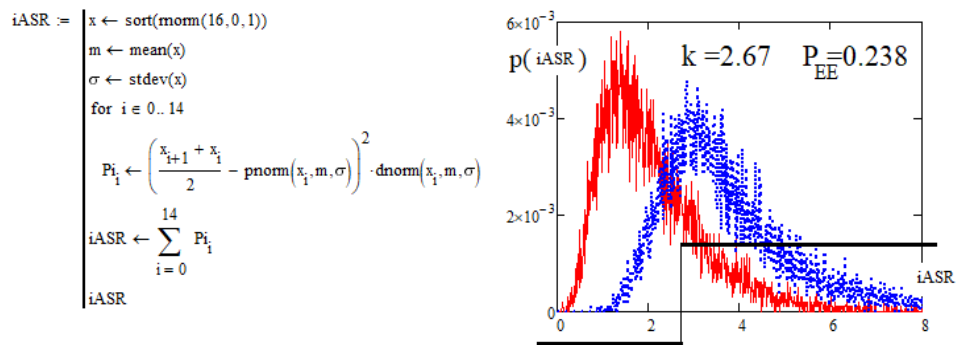


Рис. 2.10. Интегральный вариант критерия Али – Черго – Ревиса

Интегральный аналог статистического критерия оказался на много слабее своего дифференциального аналога, однако вполне возможно его использование в группе с критериями одного уровня. Корреляционные связи нового критерия с классическими критериями слабы:

Корреляционная связь с классическими критериями

$\text{corr}(iASR, KfM) = 0.0096$	$\text{corr}(iASR, G) = -0.137$	$\text{corr}(iASR, \mu_4) = -0.045$	$\text{corr}(iASR, R) = -0.1216$
$\text{corr}(iASR, LS) = 0.1816$	$\text{corr}(iASR, \chi^2) = 0.0246$	$\text{corr}(iASR, R_s) = -0.0576$	$\text{corr}(iASR, S) = -0.1877$
$\text{corr}(iASR, SKfM) = -0.1787$	$\text{corr}(iASR, AD) = -0.1372$	$\text{corr}(iASR, HU) = -0.023$	$\text{corr}(iASR, L) = -0.1719$
$\text{corr}(iASR, ASR) = 0.0799$	$\text{corr}(iASR, Fr) = -0.1796$	$\text{corr}(iASR, V5) = 0.0537$	$\text{corr}(iASR, W) = -0.105$
$\text{corr}(iASR, MT) = 0.0263$	$\text{corr}(iASR, mdx) = -0.5517$	$\text{corr}(iASR, KS) = -0.1284$	$\text{corr}(iASR, Em) = -0.0343$

Все модули коэффициентов корреляции существенно меньше 0.55.

2.1.11. Критерий Гири, накапливающий данные в пространстве двойного дифференцирования

Если отобразить входные данные в пространство двойного дифференцирования данных и выполнять в этом пространстве накопление данных, то мы должны получить ряд новых статистических критериев. На рис. 2.11 представлен пример подобного критерия Гири и результаты его численного моделирования.

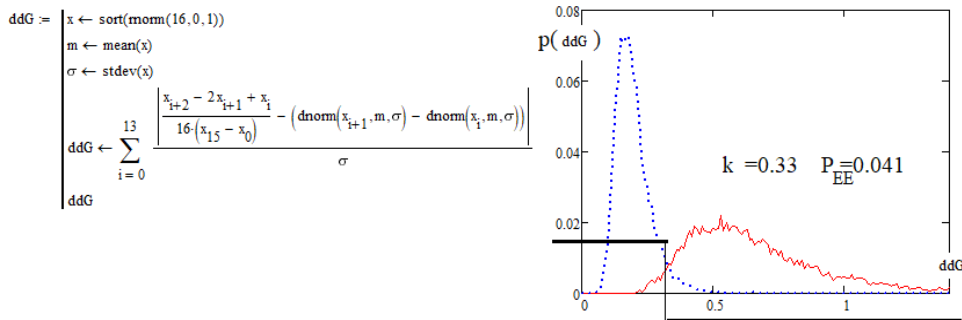


Рис. 2.11. Результаты численного моделирования критерия Гири, данные которого отображены в пространство вторых производных

Синтез нового статистического критерия с использованием производных второго порядка приводит к значительному росту качества принимаемых им решений. Получается, что первая и вторая производные дают сильные статистические критерии, являющиеся аналогами базового критерия Гири:

Корреляционная связь с классическими критериями

corr(ddG, KfM) = -0.0191	corr(ddG, G) = 0.732	corr(ddG, μ4) = 0.086	corr(ddG, R) = 0.0365
corr(ddG, LS) = 0.0171	corr(ddG, χ2) = -0.0362	corr(ddG, Rs) = 0.0874	corr(ddG, S) = 0.0276
corr(ddG, SKfM) = 0.3192	corr(ddG, AD) = 0.4628	corr(ddG, HU) = -0.0027	corr(ddG, L) = 0.0426
corr(ddG, ASR) = 0.798	corr(ddG, Fr) = 0.5694	corr(ddG, V5) = -0.0874	corr(ddG, W) = 0.6227
corr(ddG, MT) = -0.0541	corr(ddG, mdx) = 0.0402	corr(ddG, KS) = -0.0333	corr(ddG, Em) = 0.079

2.2. Новые статистические критерии, построенные на накоплении данных в пространстве среднего геометрического и среднего гармонического

2.2.1. Возможные преобразования пространств, где выполняется накопление (усреднение) данных

Пространств, в которых мы выполняем обогащение данных, множество. Наиболее понятное для всех нас является линейное накопление или вычисление математического ожидания:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot dx \approx \sum_{i=0}^{15} \frac{x_i}{16}. \quad (2.11)$$

Однако мы имеем право выполнять накопление данных и в других пространствах, например, в пространстве среднего геометрического:

$$Ge(x) \approx \sqrt[16]{\prod_{i=0}^{15} x_i} \quad \text{при } x_0 = 1; x_i \leq x_{i+1}. \quad (2.12)$$

Возможны также различные сочетания среднего геометрического и математического ожидания. Например, может быть использована метрика среднего гармонического:

$$Ga(x) \approx \frac{Ge(x)}{E(x)} \approx \frac{\sqrt[16]{\prod_{i=0}^{15} x_i}}{\frac{1}{16} \sum_{i=0}^{15} x_i} \quad \text{при } x_0 = 1; x_i \leq x_{i+1}. \quad (2.13)$$

2.2.2. Обогащение данных суммированием произведений интегральной и дифференциальной функций вероятности

Первым убедительным успехом в этом направлении синтеза новых критериев является применение суммы квадратов среднего геометрического плотности распределения и функции вероятности данных малых выборок [31–33]. Программная реализация этого критерия и вероятности выходных состояний его эквивалентного нейрона приведены на рис. 2.12.

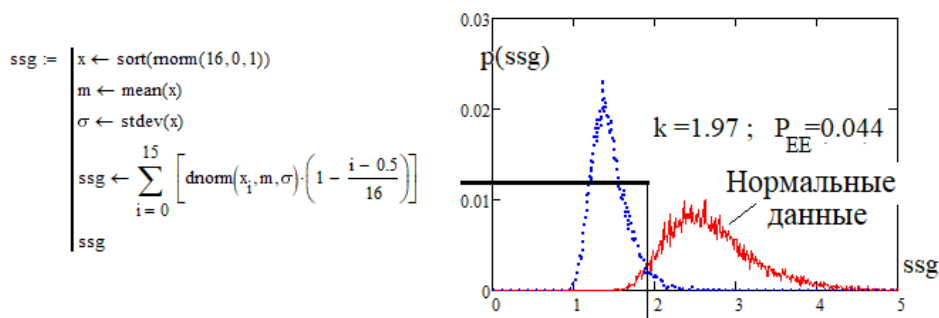


Рис. 2.12. Новый статистический критерий, показавший в 2014 г. рекордную мощь по отношению к классическим статистическим критериям

Из данных рис. 2.12 следует, что вероятности ошибок нового нейрона $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.044$ снизились более чем в 7,4 раза по отношению

к хи-квадрат критерию. Коэффициенты парной корреляции нового критерия ssg с классическими критериями {KfM, χ^2 , SKfM, KS, MT} оказались низкими $\{-0.031, -0.028, 0.296, -0.058, -0.112\}$:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(\text{ssg}, \text{KfM}) = -0.049$	$\text{corr}(\text{ssg}, \text{G}) = 0.715$	$\text{corr}(\text{ssg}, \mu_4) = 0.191$	$\text{corr}(\text{ssg}, \text{R}) = 0.0611$
$\text{corr}(\text{ssg}, \text{LS}) = 0.0381$	$\text{corr}(\text{ssg}, \chi^2) = -0.0391$	$\text{corr}(\text{ssg}, \text{Rs}) = 0.1806$	$\text{corr}(\text{ssg}, \text{S}) = 0.0608$
$\text{corr}(\text{ssg}, \text{SKfM}) = 0.2929$	$\text{corr}(\text{ssg}, \text{AD}) = 0.4403$	$\text{corr}(\text{ssg}, \text{HU}) = -0.0254$	$\text{corr}(\text{ssg}, \text{L}) = 0.0742$
$\text{corr}(\text{ssg}, \text{KS}) = -0.0631$	$\text{corr}(\text{ssg}, \text{Fr}) = 0.5522$	$\text{corr}(\text{ssg}, \text{V5}) = -0.1919$	$\text{corr}(\text{ssg}, \text{W}) = 0.5841$
$\text{corr}(\text{ssg}, \text{MT}) = -0.1194$	$\text{corr}(\text{ssg}, \text{mdx}) = 0.0939$	$\text{corr}(\text{ssg}, \text{KS}) = -0.0631$	$\text{corr}(\text{ssg}, \text{Em}) = 0.1745$

2.2.3. Обогащение данных суммированием произведений плотности вероятности и первой производной входных случайных данных

Предыдущий раздел справочника был построен на формальной замене интегральных функций вероятности на их дифференциальные аналоги. Повторим этот технический прием, заменив в критерии ssg экспериментальную оценку функции вероятности на дифференциал входных случайных данных. В итоге мы получаем еще один вариант статистического критерия. При этом вероятности ошибок первого и второго рода нового статистического критерия увеличиваются примерно в 2 раза (рис. 2.13).

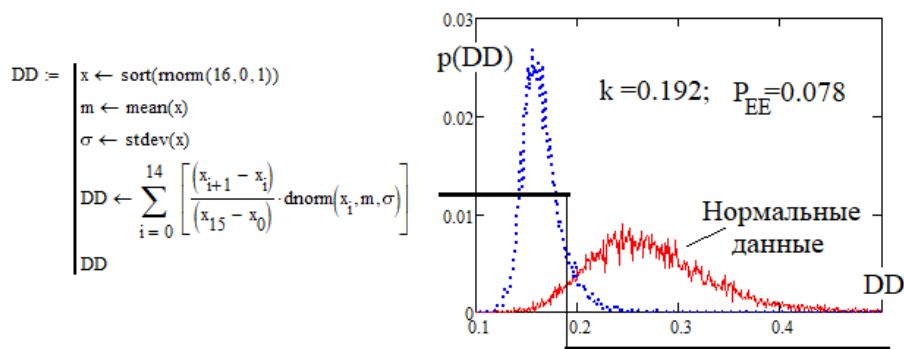


Рис. 2.13. Нейрон эквивалентный критерию накопления произведения дифференциала входных данных и ожидаемой плотности вероятности (2021) [34]

Важно отметить, что два последних статистических критерия имеют высокую корреляционную связь $\text{corr}(\text{ssg}, \text{DD}) = 0.835$, так как

принадлежат к одному семейству. При этом новый критерий DD связан с классическими статистическими критериями {KfM, χ^2 , SKfM, KS, MT}, существенно меньшими по модулю коэффициентами парной корреляции {0.00031, 0.097, 0.076, -0.154, 0.088}:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(\text{DD}, \text{KfM}) = 0.03$	$\text{corr}(\text{DD}, \text{G}) = 0.541$	$\text{corr}(\text{DD}, \mu_4) = -0.235$	$\text{corr}(\text{DD}, \text{R}) = -0.3104$
$\text{corr}(\text{DD}, \text{LS}) = 0.3111$	$\text{corr}(\text{DD}, \chi^2) = 0.1184$	$\text{corr}(\text{DD}, \text{Rs}) = -0.2777$	$\text{corr}(\text{DD}, \text{S}) = -0.4129$
$\text{corr}(\text{DD}, \text{SKfM}) = 0.0917$	$\text{corr}(\text{DD}, \text{AD}) = 0.2989$	$\text{corr}(\text{DD}, \text{HU}) = -0.0382$	$\text{corr}(\text{DD}, \text{L}) = -0.3949$
$\text{corr}(\text{DD}, \text{KS}) = -0.1268$	$\text{corr}(\text{DD}, \text{Fr}) = 0.3121$	$\text{corr}(\text{DD}, \text{V5}) = 0.2679$	$\text{corr}(\text{DD}, \text{W}) = 0.3171$
$\text{corr}(\text{DD}, \text{MT}) = 0.1236$	$\text{corr}(\text{DD}, \text{mdx}) = 0.1153$	$\text{corr}(\text{DD}, \text{KS}) = -0.1268$	$\text{corr}(\text{DD}, \text{Em}) = -0.2455$

2.2.4. Обогащение данных суммированием произведений плотности вероятности и модуля второй производной входных случайных данных

Если мы в предыдущем критерии первую производную упорядоченных случайных данных заменим на модуль второй производной, то получим еще один работоспособный статистический критерий d2d. Плотности вероятности выходных состояний искусственного нейрона этого критерия отображены на рис. 2.14.

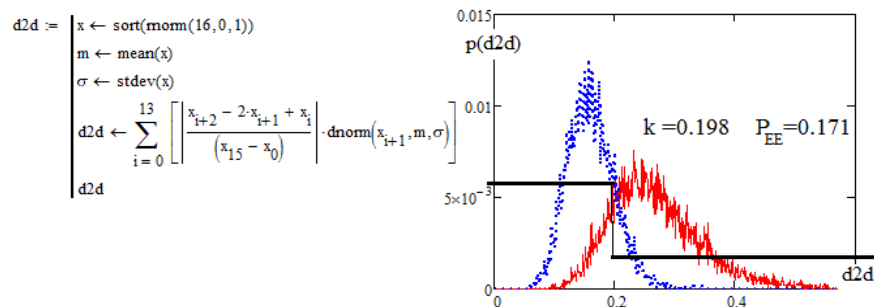


Рис. 2.14. Статистический критерий, построенный усреднением произведения модуля второй производной входных данных и их ожидаемой плотности вероятности

Вероятности ошибок первого и второго рода у нового статистического критерия возрастают, однако модули коэффициентов корреляции внутри группы {d2d, DD, ssg} снижаются $\text{corr}(\text{d2d}, \text{ssg}) = 0.585$, $\text{corr}(\text{d2d}, \text{DD}) = 0.738$, $\text{corr}(\text{ssg}, \text{DD}) = 0.835$. Модули корреляционных

связей между критерием d2d с классическими критериями {KfM, χ^2 , SKfM, KS, MT} по-прежнему остаются низкими $\{-0.038, 0.166, 0.071, -0.007, 0.096\}$:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(d2d, KfM) = -0.209$	$\text{corr}(d2d, G) = -0.381$	$\text{corr}(d2d, \mu4) = -0.0076$	$\text{corr}(d2d, R) = -0.4952$
$\text{corr}(d2d, LS) = 0.8601$	$\text{corr}(d2d, \chi^2) = -0.01$	$\text{corr}(d2d, Rs) = 0.0043$	$\text{corr}(d2d, S) = -0.7731$
$\text{corr}(d2d, SKfM) = -0.522$	$\text{corr}(d2d, AD) = -0.4366$	$\text{corr}(d2d, HU) = 0.0205$	$\text{corr}(d2d, L) = -0.6246$
$\text{corr}(d2d, KS) = -0.3933$	$\text{corr}(d2d, Fr) = -0.4848$	$\text{corr}(d2d, V5) = 0.0031$	$\text{corr}(d2d, W) = -0.4076$
$\text{corr}(d2d, MT) = -0.233$	$\text{corr}(d2d, mdx) = 0.4122$	$\text{corr}(d2d, KS) = -0.3933$	$\text{corr}(d2d, Em) = 0.0019$

2.2.5. Обогащение данных вычислением среднего геометрического

В случае, если мы вычисляем критерий среднего геометрического без суммирования, мы получаем вероятности ошибок близкие к хи-квадрат критерию. Эту ситуацию иллюстрирует рис. 2.15.

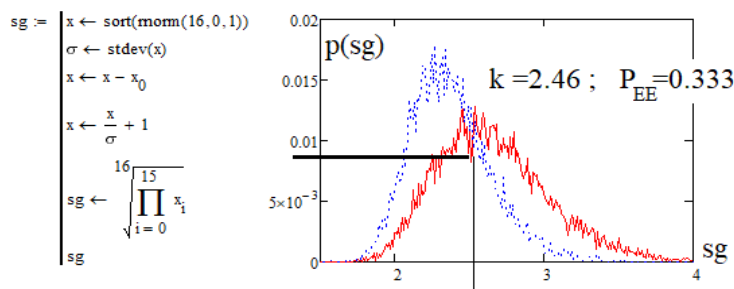


Рис. 2.15. Критерий среднего геометрического данных малой выборки

Новый статистический критерий sg интересен тем, что существенно снижает среднее значения модулей коэффициентов корреляции в рассматриваемой группе критериев среднего геометрического $\{d2d, DD, ssg\}$ до величин $\{-0.337, -0.41, 0.051\}$:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(sg, KfM) = -0.036$	$\text{corr}(sg, G) = 0.294$	$\text{corr}(sg, \mu4) = 0.4712$	$\text{corr}(sg, R) = 0.6771$
$\text{corr}(sg, LS) = -0.7946$	$\text{corr}(sg, \chi^2) = -0.2364$	$\text{corr}(sg, Rs) = 0.5663$	$\text{corr}(sg, S) = 0.9395$
$\text{corr}(sg, SKfM) = 0.4728$	$\text{corr}(sg, AD) = 0.3233$	$\text{corr}(sg, HU) = 0.086$	$\text{corr}(sg, L) = 0.9538$
$\text{corr}(sg, KS) = 0.3417$	$\text{corr}(sg, Fr) = 0.4632$	$\text{corr}(sg, V5) = -0.5223$	$\text{corr}(sg, W) = 0.4202$
$\text{corr}(sg, MT) = -0.1845$	$\text{corr}(sg, mdx) = -0.3421$	$\text{corr}(sg, KS) = 0.3417$	$\text{corr}(sg, Em) = 0.4613$

2.2.6. Обогащение данных вычислением среднего гармонического, умноженного на медиану разброса данных малой выборки

Очевидно, что высокая вероятность ошибок критерия среднего геометрического sg может быть снижена. Например, это может быть сделано, если перейти к критерию среднего гармонического (к критерию Лоулеса, см. рис. 20 главы 1). В этом случае удастся снизить значения вероятностей ошибок до величины 0.313. Еще больше удастся снизить вероятности ошибок, если модифицировать критерий Лоулеса, домножив его на медиану размаха данных случайной выборки. Эта ситуация отображена на рис. 2.16.

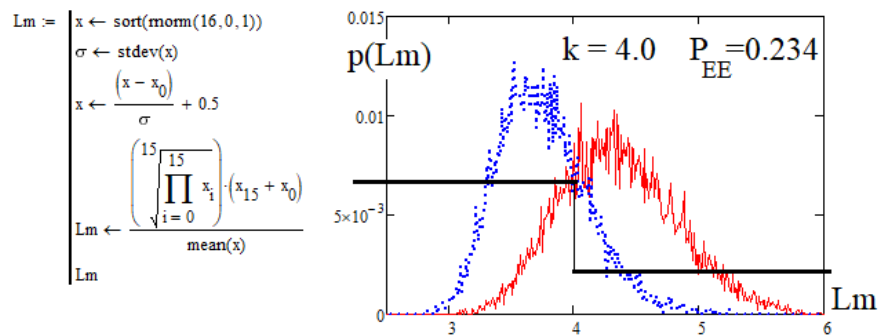


Рис. 2.16. Модифицированный критерий Лоулеса и эквивалентный ему искусственный нейрон

Таким образом, переходя от линейного накопления данных (вычисления среднего арифметического) к накоплению данных в пространстве среднего геометрического (среднего гармонического), мы имеем возможность создавать новые статистические критерии. Сколько таких критериев можно создать и насколько они эффективны в комбинациях с классическими статистическими критериями прошлого века, неизвестно. Тем не менее всегда выгодно объединять статистические критерии с низким значением модулей коэффициентов корреляции. Все рассмотренные в данном разделе критерии имеют низкие значения модулей коэффициентов корреляции по отношению к большинству классических статистических критериев прошлого века:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(Lm, KfM) = -0.29$	$\text{corr}(Lm, G) = 0.057$	$\text{corr}(Lm, \mu_4) = 0.7818$	$\text{corr}(Lm, R) = 0.3952$
$\text{corr}(Lm, LS) = -0.2503$	$\text{corr}(Lm, \chi^2) = -0.4098$	$\text{corr}(Lm, Rs) = 0.9674$	$\text{corr}(Lm, S) = 0.6555$
$\text{corr}(Lm, SKfM) = 0.1416$	$\text{corr}(Lm, AD) = 0.015$	$\text{corr}(Lm, HU) = 0.1763$	$\text{corr}(Lm, L) = 0.8167$
$\text{corr}(Lm, KS) = 0.0123$	$\text{corr}(Lm, Fr) = 0.1881$	$\text{corr}(Lm, V5) = -0.8796$	$\text{corr}(Lm, W) = 0.2427$
$\text{corr}(Lm, MT) = -0.5871$	$\text{corr}(Lm, mdx) = 0.0515$	$\text{corr}(Lm, KS) = 0.0123$	$\text{corr}(Lm, Em) = 0.7619$

2.3. Критерии, построенные на оценке вероятности редких событий в хвостах анализируемых распределений

2.3.1. Искусственный нейрон, соответствующий сумме вероятностей хвостов

Следует отметить, что большинство классических статистических критериев строилось на анализе сходства статистических характеристик данных малых выборок. Чем ближе друг другу статистические распределения экспериментальных и ожидаемых данных, тем более «похожими» они являются. Можно изменить подход к решаемой задаче и анализировать вероятности появления редких событий в хвостах анализируемых распределений. Пример реализации нового критерия в такой парадигме приведен на рис. 2.17.

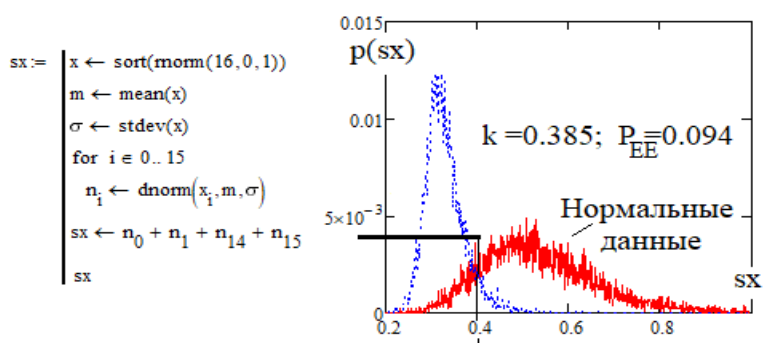


Рис 2.17. Искусственный нейрон, эквивалентный сумме вероятностей хвостов (2020) [35]

Рассматриваемый критерий дает вероятности ошибок примерно в 3 раза меньше, чем классический хи-квадрат критерий. Главным преимуществом нового критерия является то, что он имеет низкие модули корреляционных коэффициентов с классическими статистическими критериями {KfM, χ^2 , SKfM, KS, MT}, образующими последовательность значений $\{-0.015, 0.016, 0.194, 0.011, 0.05\}$. Это и открывает дополнительные перспективы по формированию перспективных сборок из нового искусственного нейрона и нескольких нейронов, эквивалентных классическим статистическим критериям:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(sx, \text{KfM}) = 0.202$	$\text{corr}(sx, G) = 0.716$	$\text{corr}(sx, \mu_4) = 0.0363$	$\text{corr}(sx, R) = 0.1244$
$\text{corr}(sx, \text{LS}) = 0.00056$	$\text{corr}(sx, \chi^2) = 0.2436$	$\text{corr}(sx, R_s) = -0.1022$	$\text{corr}(sx, S) = -0.0747$
$\text{corr}(sx, \text{SKfM}) = 0.3848$	$\text{corr}(sx, \text{AD}) = 0.5619$	$\text{corr}(sx, \text{HU}) = -0.3088$	$\text{corr}(sx, L) = -0.0994$
$\text{corr}(sx, \text{KS}) = 0.1315$	$\text{corr}(sx, \text{Fr}) = 0.549$	$\text{corr}(sx, V5) = 0.0984$	$\text{corr}(sx, W) = 0.4958$
$\text{corr}(sx, \text{MT}) = 0.2775$	$\text{corr}(sx, \text{mdx}) = -0.1011$	$\text{corr}(sx, \text{KS}) = 0.1315$	$\text{corr}(sx, \text{Em}) = 0.088$

2.3.2. Искусственный нейрон, соответствующий сумме обратных плотностей вероятности

Очевидным является так же то, что вместо суммирования плотностей вероятности далеких от центра данных мы можем оценить вероятности их появления в выборке и дать оценку сумме наблюдаемых вероятностей. Плотности вероятности выходных состояний нового статистического критерия отображены на рис. 2.18.

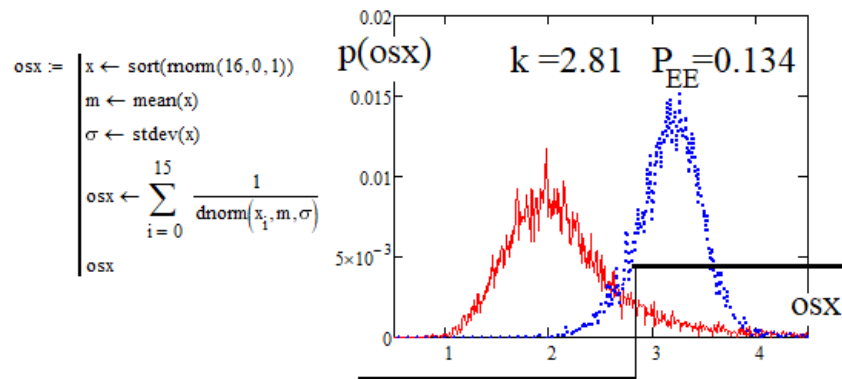


Рис. 2.18. Критерий суммы обратных значений ожидаемой плотности вероятности

Принципиально важным является то, что два последних статистических критерия имеют слабую по модулю корреляционную связь $\text{corr}(sx, osx) = -0.232$. Корреляционная связь с классическими статистическими критериями $\{KfM, \chi^2, SKfM, KS, MT\}$ также имеет низкие показатели модулей $\{0.018, 0.078, 0.039, 0.112\}$:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(osx, KfM) = 0.0503$	$\text{corr}(osx, G) = -0.194$	$\text{corr}(osx, \mu_4) = 0.7708$	$\text{corr}(osx, R) = 0.599$
$\text{corr}(osx, LS) = -0.00556$	$\text{corr}(osx, \chi^2) = 0.1111$	$\text{corr}(osx, Rs) = 0.4912$	$\text{corr}(osx, S) = 0.2555$
$\text{corr}(osx, SKfM) = 0.0558$	$\text{corr}(osx, AD) = -0.0329$	$\text{corr}(osx, HU) = -0.4489$	$\text{corr}(osx, L) = 0.2365$
$\text{corr}(osx, KS) = 0.1122$	$\text{corr}(osx, Fr) = -0.0588$	$\text{corr}(osx, V5) = -0.534$	$\text{corr}(osx, W) = -0.0118$
$\text{corr}(osx, MT) = -0.144$	$\text{corr}(osx, mdx) = 0.038$	$\text{corr}(osx, KS) = 0.1122$	$\text{corr}(osx, Em) = 0.6659$

2.3.3. Искусственный нейрон, соответствующий дифференциальному критерию, построенному на провале чувствительности к данным выборки в центре и подчеркивании влияния хвостов

Проще всего организовать вычисления с утратой чувствительности в центре выборки, воспользовавшись гипотезой нормального распределения данных малой выборки. Плотность распределения

нормального закона должна иметь максимум в центре выборки и почти нулевые состояния для ее крайних элементов. Как результат мы имеем новый статистический критерий с провалом чувствительности в центре выборки, плотности вероятности его выходных состояний отображены на рис. 2.19.

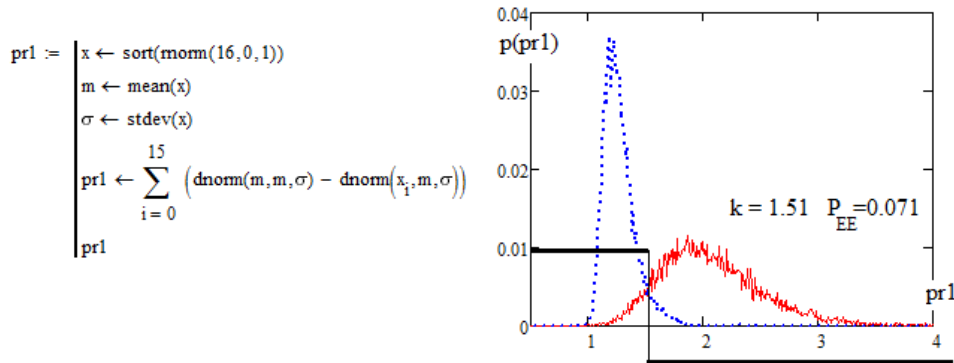


Рис. 2.19. Дифференциальный статистический критерий с низкой чувствительностью к данным в центре выборки

Из рис. 2.19 видно, что даже столь примитивный статистический критерий оказывается лучше классического хи-квадрат критерия примерно в 4,6 раза. При этом новый критерий имеет достаточно высокий уровень корреляционных связей с двумя предшествующими статистическими критериями {sx, osx}, соответственно {0.792, -0.616}. С классическими статистическими критериями {KfM, χ^2 , SKfM, KS, MT} новый критерий по-прежнему имеет слабые корреляционные связи {0.073, 0.07, 0.251, -0.0099, 0.222}:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

corr(pr1, KfM) = 0.073	corr(pr1, G) = 0.675	corr(pr1, μ_4) = -0.3866	corr(pr1, R) = -0.1822
corr(pr1, LS) = -0.00127	corr(pr1, χ^2) = 0.0699	corr(pr1, Rs) = -0.3551	corr(pr1, S) = -0.1859
corr(pr1, SKfM) = 0.2512	corr(pr1, AD) = 0.4261	corr(pr1, HU) = 0.0839	corr(pr1, L) = -0.1969
corr(pr1, KS) = -0.0099	corr(pr1, Fr) = 0.4695	corr(pr1, V5) = 0.3769	corr(pr1, W) = 0.4269
corr(pr1, MT) = 0.2215	corr(pr1, mdx) = -0.0587	corr(pr1, KS) = -0.0099	corr(pr1, Em) = -0.3528

2.3.4. Искусственный нейрон, соответствующий интегральному критерию, построенному на провале чувствительности к данным выборки в центре и подчеркивании влияния хвостов

Так как мы получили достаточно эффективный вариант дифференциального статистического критерия, мы всегда можем перейти

от использования функций плотностей распределения вероятности к эквивалентным им функциям вероятности. Программное обеспечение для реализации нового критерия дано в левой части рис. 2.20. В правой части этого рисунка приведены плотности вероятности выходных состояний нового критерия:

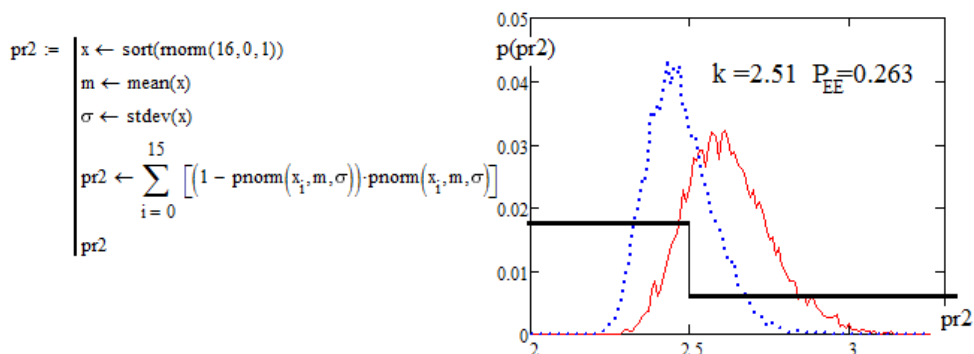


Рис. 2.20. Интегральный статистический критерий с низкой чувствительностью к данным в центре выборки

Новый статистический критерий имеет значимые корреляционные связи с тремя предыдущими критериями: $\text{corr}(\text{pr2}, \{\text{sx}, \text{osx}, \text{pr1}\}) = \{-0.151, 0.598, -0.419\}$. Ошибки первого и второго рода появляются примерно на 25 % реже, чем у классического хи-квадрат критерия:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(\text{pr2}, \text{KfM}) = -0.193$	$\text{corr}(\text{pr2}, G) = 0.048$	$\text{corr}(\text{pr2}, \mu_4) = 0.9314$	$\text{corr}(\text{pr2}, R) = 0.3835$
$\text{corr}(\text{pr2}, \text{LS}) = -0.01655$	$\text{corr}(\text{pr2}, \chi^2) = -0.1962$	$\text{corr}(\text{pr2}, R_s) = 0.8665$	$\text{corr}(\text{pr2}, S) = 0.4714$
$\text{corr}(\text{pr2}, \text{SKfM}) = 0.15$	$\text{corr}(\text{pr2}, \text{AD}) = 0.0506$	$\text{corr}(\text{pr2}, \text{HU}) = -0.1537$	$\text{corr}(\text{pr2}, L) = 0.5142$
$\text{corr}(\text{pr2}, \text{KS}) = 0.0048$	$\text{corr}(\text{pr2}, \text{Fr}) = 0.1776$	$\text{corr}(\text{pr2}, V_5) = -0.9193$	$\text{corr}(\text{pr2}, W) = 0.2672$
$\text{corr}(\text{pr2}, \text{MT}) = -0.5606$	$\text{corr}(\text{pr2}, \text{mdx}) = 0.1887$	$\text{corr}(\text{pr2}, \text{KS}) = 0.0048$	$\text{corr}(\text{pr2}, \text{Em}) = 0.8276$

2.3.5. Искусственный нейрон, соответствующий критерию, построенному на произведении дифференциального и интегрального критериев с провалом чувствительности в центре выборки

Одним из способов взаимного усиления двух статистических критериев провала чувствительности в центре выборки является их перемножение. Программная реализация подобного подхода и результаты численного моделирования приведены на рис. 2.21.

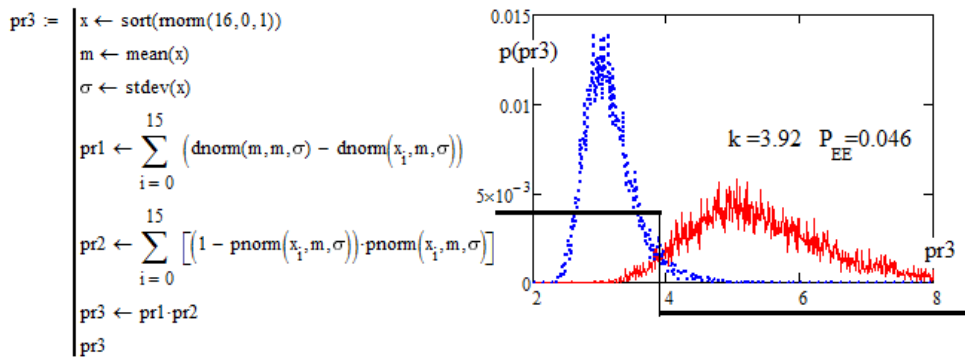


Рис. 2.21. Взаимное усиление дифференциального и интегрального критерия их перемножением

Результаты численного эксперимента показали, что произведение критериев позволяет почти в два раза снизить вероятности ошибок лучшего из двух критериев. При этом внутри группы рассматриваемых критериев с новым критерием $pr3$ корреляционные связи оказываются высокими: $\text{corr}(pr3, \{sx, osx, pr1, pr2\}) = \{0.818, -0.565, 0.976, -0.206\}$. Корреляционные связи с классическими статистическими критериями по-прежнему остаются низкими: $\text{corr}(pr3, \{KfM, \chi^2, SKfM, KS, MT\}) = \{0.03, 0.042, 0.308, 0.0055, 0.111\}$:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(pr3, KfM) = 0.0041$	$\text{corr}(pr3, G) = 0.722$	$\text{corr}(pr3, \mu_4) = -0.2006$	$\text{corr}(pr3, R) = -0.0995$
$\text{corr}(pr3, LS) = 0.00663$	$\text{corr}(pr3, \chi^2) = 0.0222$	$\text{corr}(pr3, Rs) = -0.1773$	$\text{corr}(pr3, S) = -0.0975$
$\text{corr}(pr3, SKfM) = 0.2991$	$\text{corr}(pr3, AD) = 0.4561$	$\text{corr}(pr3, HU) = 0.061$	$\text{corr}(pr3, L) = -0.1054$
$\text{corr}(pr3, KS) = -0.013$	$\text{corr}(pr3, Fr) = 0.5349$	$\text{corr}(pr3, V5) = 0.1909$	$\text{corr}(pr3, W) = 0.4863$
$\text{corr}(pr3, MT) = 0.0875$	$\text{corr}(pr3, mdx) = -0.027$	$\text{corr}(pr3, KS) = -0.013$	$\text{corr}(pr3, Em) = -0.1753$

2.3.6. Искусственный нейрон, соответствующий критерию, построенному на произведении дифференциального и интегрального критериев по каждому отсчету малой выборки

Следует отметить, что рассмотренный выше критерий $pr3$ не является единственным. Возможен еще один способ реализации подобного критерия, когда перемножаются между собой компоненты интегрального и дифференциального критериев до их суммирования. Программная реализация второго способа сборки дана в левой части рис. 2.22. В правой части этого рисунка представлены результаты численного моделирования состояний нового критерия.

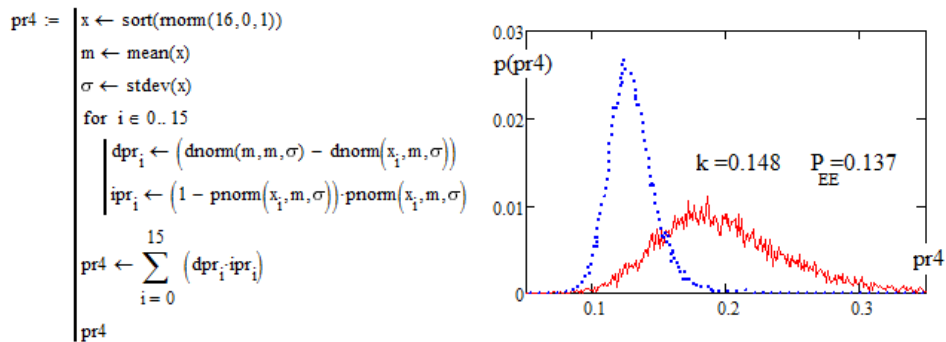


Рис. 2.22. Второй вариант критерия $pr4$, полученного перемножением фрагментов дифференциального и интегрального критериев с провалом чувствительности в центре малой выборки до суммирования

Мощность нового критерия оказывается примерно в три раза хуже предыдущего, однако он имеет иные корреляционные связи в группе: $\text{corr}(pr4, \{sx, osx, pr1, pr2, pr3\}) = \{0.844, -0.549, 0.929, 0.86, -0.556\}$. Корреляционные связи с классическими статистическими критериями по-прежнему остаются низкими:

$$\text{corr}(pr4, \{KfM, \chi^2, SKfM, KS, MT\}) = \{0.16, 0.16, 0.24, 0.055, 0.39\}.$$

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(pr4, KfM) = 0.157$	$\text{corr}(pr4, G) = 0.597$	$\text{corr}(pr4, \mu_4) = -0.4355$	$\text{corr}(pr4, R) = -0.1612$
$\text{corr}(pr4, LS) = 0.01227$	$\text{corr}(pr4, \chi^2) = 0.1595$	$\text{corr}(pr4, Rs) = -0.4469$	$\text{corr}(pr4, S) = -0.2561$
$\text{corr}(pr4, SKfM) = 0.2333$	$\text{corr}(pr4, AD) = 0.4168$	$\text{corr}(pr4, HU) = -0.0453$	$\text{corr}(pr4, L) = -0.2848$
$\text{corr}(pr4, KS) = 0.0585$	$\text{corr}(pr4, Fr) = 0.3879$	$\text{corr}(pr4, V3) = 0.4783$	$\text{corr}(pr4, W) = 0.2934$
$\text{corr}(pr4, MT) = 0.3918$	$\text{corr}(pr4, mdx) = -0.1329$	$\text{corr}(pr4, KS) = 0.0585$	$\text{corr}(pr4, Em) = -0.3399$

2.3.7. Искусственный нейрон, соответствующий критерию, построенному на дифференцировании входных данных и провале чувствительности в центре малой выборки

В разделе 2.2 данной работы было показано, что дифференцирование входных данных малых выборок является эффективным техническим приемом получения новых статистических критериев. Подтвердим этот тезис, выполнив дифференцирование входных случайных данных с его взвешиванием критерием $pr1$ (рис. 2.19). Программное обеспечение для численного эксперимента и его результаты приведены на рис. 2.23.

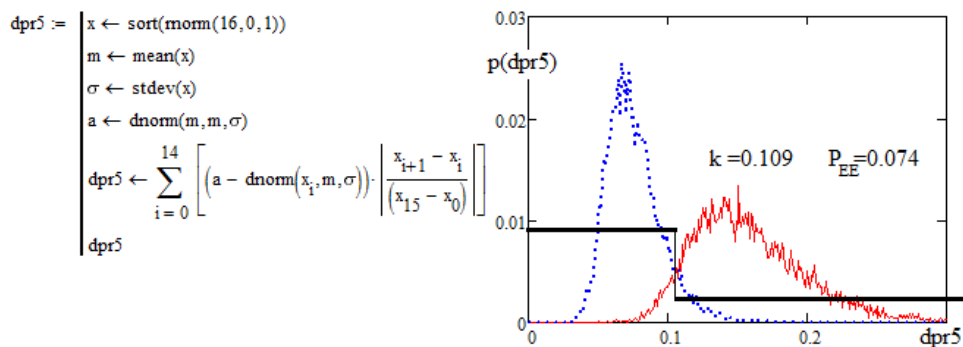


Рис. 2.23. Эффект от использования численного дифференцирования входных данных малой выборки через модификацию критерия pr1

По результатам численного эксперимента мы наблюдаем высокий уровень доверительной вероятности к принимаемым решениям. При этом уровень корреляционной сцепленности между однотипными критериями снижается:

$$\text{corr}(\text{dpr5}, \{\text{sx}, \text{osx}, \text{pr1}, \text{pr2}, \text{pr3}\}) = \{-0.569, -0.072, 0.503, 0.37, -0.41\}.$$

Появились коэффициенты корреляции с малым значением модуля и исчезли коэффициенты корреляции с большим значением модуля. Корреляционные связи с классическими статистическими критериями по-прежнему остаются низкими:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{KfM}) = -0.0331$	$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{G}) = 0.773$	$\text{corr}(\text{dpr5}, \mu_4) = 0.3504$	$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{R}) = 0.3598$
$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{LS}) = -0.44026$	$\text{corr}(\text{dpr5}, \chi^2) = -0.1467$	$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{Rs}) = 0.4013$	$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{S}) = 0.5876$
$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{SKfM}) = 0.5797$	$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{AD}) = 0.589$	$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{HU}) = 0.0331$	$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{L}) = 0.5647$
$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{KS}) = 0.1941$	$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{Fr}) = 0.7593$	$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{V5}) = -0.3928$	$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{W}) = 0.7475$
$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{MT}) = -0.1544$	$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{mdx}) = -0.1565$	$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{KS}) = 0.1941$	$\text{corr}(\text{dpr5}, \text{Em}) = 0.3664$

2.3.8. Искусственный нейрон, соответствующий критерию, построенному на двойном дифференцировании входных данных и провале чувствительности в центре малой выборки

Следующим очевидным шагом является замена в предыдущем критерии первой производной на вторую производную входных данных. В результате мы получаем новый вариант статистического критерия, статистики выходных состояний которого приведены на рис. 2.24.

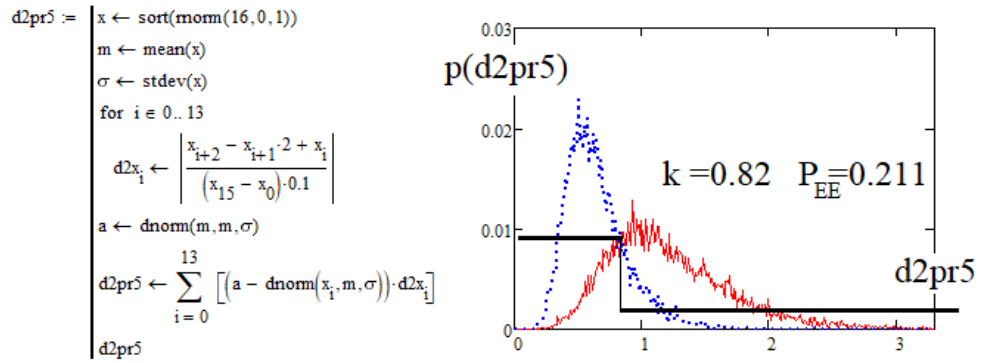


Рис. 2.24. Эффект от вычисления второй производной входных данных малой выборки с последующей модификацией базового критерия pr1

Сравнивая между собой два последних статистических критерия, мы наблюдаем очевидное снижение качества принимаемых ими решений по мере роста порядка использованной производной. Если мы пойдем дальше по этому пути, то применение производных третьего и более высоких порядков должно приводить к дальнейшему снижению качества принимаемых решений. При этом уровень корреляционной сцепленности между однотипными критериями снижается: $\text{corr}(d2pr5, \{\text{osx}, \text{pr1}, \text{pr2}, \text{dpr5}\}) = \{-0.14, 0.397, 0.097, 0.66\}$. Корреляционные связи с классическими статистическими критериями остаются низкими:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(dpr5, \text{KfM}) = -0.0331$	$\text{corr}(dpr5, G) = 0.773$	$\text{corr}(dpr5, \mu_4) = 0.3504$	$\text{corr}(dpr5, R) = 0.3598$
$\text{corr}(dpr5, \text{LS}) = -0.44026$	$\text{corr}(dpr5, \chi^2) = -0.1467$	$\text{corr}(dpr5, \text{Rs}) = 0.4013$	$\text{corr}(dpr5, S) = 0.5876$
$\text{corr}(dpr5, \text{SKfM}) = 0.5797$	$\text{corr}(dpr5, \text{AD}) = 0.589$	$\text{corr}(dpr5, \text{HU}) = 0.0331$	$\text{corr}(dpr5, L) = 0.5647$
$\text{corr}(dpr5, \text{KS}) = 0.1941$	$\text{corr}(dpr5, \text{Fr}) = 0.7593$	$\text{corr}(dpr5, \text{V5}) = -0.3928$	$\text{corr}(dpr5, W) = 0.7475$
$\text{corr}(dpr5, \text{MT}) = -0.1544$	$\text{corr}(dpr5, \text{mdx}) = -0.1565$	$\text{corr}(dpr5, \text{KS}) = 0.1941$	$\text{corr}(dpr5, \text{Em}) = 0.3664$

2.3.9. Искусственный нейрон, соответствующий критерию, построенному на замене производной входных данных функцией их вероятности

Вновь вернуться к критериям, обеспечивающим достаточно высокий уровень доверительной вероятности, удастся в случае, когда мы откажемся от вычисления второй производной входных данных. Например, вместо второй производной может быть использована экспериментальная оценка функции вероятности. Плотности вероятности для такого критерия отображены на рис. 2.25.

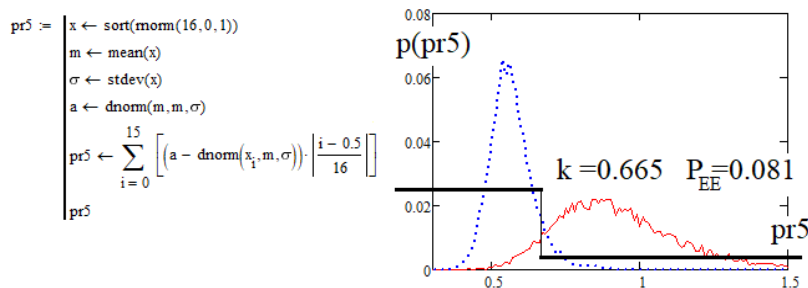


Рис. 2.25. Эффект от замещения второй производной входных данных малой выборкой оценкой функции вероятности

При такой замене вероятности ошибок первого и второго рода снижаются более чем в 2 раза. При этом существенно растет коэффициент корреляции нового критерия с базовым критерием:

$$\text{corr}(\text{pr5}, \{\text{pr1}, \text{pr2}, \text{dpr5}, \text{d2pr5}\}) = \{0.94, -0.37, 0.303, 0.464\}.$$

Корреляционные связи с классическими статистическими критериями остаются низкими.

Естественно, что в этом параграфе мы не можем рассмотреть все возможные варианты статистических критериев, построенных на снижении чувствительности к данным в центре малых выборок. Тем не менее добавление девяти новых статистических критериев к 21 классическому статистическому критерию является положительной тенденцией. Рост кодовой избыточности выходных состояний обобщающей несколько статистических критериев нейросети потенциально должен приводить к росту доверительной вероятности принимаемых решений:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(\text{pr5}, \text{KfM}) = 0.0704$	$\text{corr}(\text{pr5}, \text{G}) = 0.557$	$\text{corr}(\text{pr5}, \mu_4) = -0.385$	$\text{corr}(\text{pr5}, \text{R}) = -0.212$
$\text{corr}(\text{pr5}, \text{LS}) = 0.08846$	$\text{corr}(\text{pr5}, \chi_2) = 0.0729$	$\text{corr}(\text{pr5}, \text{Rs}) = -0.348$	$\text{corr}(\text{pr5}, \text{S}) = -0.2711$
$\text{corr}(\text{pr5}, \text{SKfM}) = 0.0618$	$\text{corr}(\text{pr5}, \text{AD}) = 0.2894$	$\text{corr}(\text{pr5}, \text{HU}) = 0.082$	$\text{corr}(\text{pr5}, \text{L}) = -0.2784$
$\text{corr}(\text{pr5}, \text{KS}) = -0.1412$	$\text{corr}(\text{pr5}, \text{Fr}) = 0.2923$	$\text{corr}(\text{pr5}, \text{V5}) = 0.3716$	$\text{corr}(\text{pr5}, \text{W}) = 0.2583$
$\text{corr}(\text{pr5}, \text{MT}) = 0.2045$	$\text{corr}(\text{pr5}, \text{mdx}) = 0.0596$	$\text{corr}(\text{pr5}, \text{KS}) = -0.1412$	$\text{corr}(\text{pr5}, \text{Em}) = -0.3439$

В этом параграфе нет возможности рассмотреть все варианты статистических критериев, построенных на снижении чувствительности к данным в центре малых выборок. Тем не менее добавление девяти новых статистических критериев к 21 классическому статистическому критерию является положительной тенденцией. Рост кодовой избыточности выходных состояний обобщающей несколько статистических критериев нейросети потенциально должен приводить к росту доверительной вероятности принимаемых решений.

2.4. Перспективы использования полиномиальных искусственных нейронов

2.4.1. Частично ортогональная статистическая обработка данных за счет использования полиномов Лежандра

2.4.1.1. Утрата ортогональности полиномами Лежандра на малых выборках

Одним из очевидных направлений синтеза статистических критериев проверки той или иной статистической гипотезы является их ортогонализация. В частности, в 1937 г. был создан критерий Неймана – Бартон [12], построенный с использованием ортогональных полиномов Лежандра для проверки гипотезы равномерного распределения данных. Если равномерно распределенные данные находятся в интервале от -1 до $+1$, то ортогональность полиномов Лежандра на достаточно больших выборках должна приводить к выполнению интегральных соотношений, приведенных в табл. 2.1.

Таблица 2.1

**Ожидаемые интегральные соотношения
между первыми тремя полиномами Лежандра**

Следствия взаимной ортогональности полиномов Лежандра		
$\int_{-1}^1 x \, dx = 0 \quad (1)$	$\int_{-1}^1 x^2 \, dx = 0.667 \quad (4)$	$\int_{-1}^1 x \cdot \frac{(3x^2 - 1)}{2} \, dx = 0 \quad (7)$
$\int_{-1}^1 \frac{(3x^2 - 1)}{2} \, dx = 0 \quad (2)$	$\int_{-1}^1 \left[\frac{(3x^2 - 1)}{2} \right]^2 \, dx = 0.4 \quad (5)$	$\int_{-1}^1 x \cdot \frac{(5x^3 - 3x)}{2} \, dx = 0 \quad (8)$
$\int_{-1}^1 \frac{(5x^3 - 3x)}{2} \, dx = 0 \quad (3)$	$\int_{-1}^1 \left[\frac{(5x^3 - 3x)}{2} \right]^2 \, dx = 0.286 \quad (6)$	$\int_{-1}^1 \frac{(3x^2 - 1)}{2} \cdot \frac{(5x^3 - 3x)}{2} \, dx = 0 \quad (9)$

Правый и левый столбцы интегральных соотношений табл. 2.1 должны быть нулевыми. Это дало право Нейману и Бартону строить свой статистический критерий, опираясь только на центральный столбец интегралов табл. 2.1.

К сожалению, идея ортогонализации статистических преобразований, сформулированная в 1937 г., дальнейшего развития не получила. Видимо, это произошло из-за того, что ортогональные преобразования Лежандра оказались достаточно чувствительны к объему тестовых

выборок. В нашем случае при снижении объема выборки до 16 опытов ортогональность полиномов Лежандра катастрофически разрушается.

2.4.1.2. Численный эксперимент по использованию полиномов Лежандра как частично ортогональных на малых выборках

Оценить эффект от утраты ортогональности на малых выборках можно, воспользовавшись численным экспериментом по оценке значений интегральных соотношений (2) и (8) табл. 2.1. При больших выборках (либо при вычислении интегралов по континууму) интегралы (2) и (8) должны стать нулевыми для равномерных данных. Для малых выборок в 16 опытов этого не наблюдается. Программное обеспечение для проведения численного эксперимента и результаты численного эксперимента приведены на рис. 2.26.

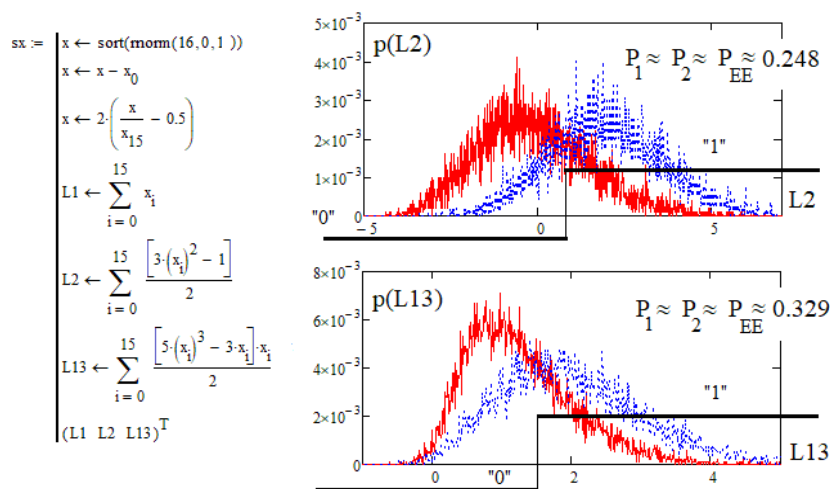


Рис. 2.26. Численный эксперимент по оценке утраты ортогональности полиномами Лежандра второго порядка L2 и произведения полиномов Лежандра первого порядка и третьего порядка L13

В правой части рисунка приведены распределения значений откликов полиномов Лежандра L2 и L13, создаваемые первой строкой программы. В левой части рисунка дан код программы на языке MathCAD, воспроизводящей нормально распределенные данные малых выборок и их отклики полиномами Лежандра. Равномерно распределенные данные получают заменой первой строки программы на другую строку кода: « $x \leftarrow \text{sort}(\text{runif}(16, -1, +1))$ ».

Из рисунка видно, что отклики полиномиального нейрона Лежандра L2 на нормальные и равномерные данные малых выборок линейно разделимы. Достаточно простейшего квантователя с единственным порогом $k = 0.81$. При этом данные удается разделить

с одинаковыми значениями вероятностей ошибок первого и второго рода – 0.248. Это примерно на 8 % меньше, чем дает искусственный нейрон, являющийся аналогом критерия Неймана – Бартона [6]. Квантователь нового нейрона L2 дает состояние «0» при обнаружении нормальных данных и состояние «1» при обнаружении равномерно распределенных данных.

Может быть создан еще один искусственный нейрон, построенный на произведении полиномов Лежандра первого и третьего порядка. Для него при пороге квантователя $k = 1.45$ равные вероятности ошибок первого и второго рода составляют величину 0.329. Это значение примерно на 23 % хуже аналогичного показателя исходного критерия Неймана – Бартона [12].

В итоге получается, что множество полиномов Лежандра вполне может использоваться как множество самостоятельных статистических критериев при решении задачи разделения малых выборок с нормальным и равномерным распределением данных.

2.4.1.3. Дробление интегрального критерия Неймана – Бартона на три самостоятельных критерия

В итоге получается, что множество полиномов Лежандра вполне может использоваться как множество самостоятельных статистических критериев при решении задачи разделения малых выборок с нормальным и равномерным распределением данных. На рис. 2.27 приведены отклики искусственных нейронов, построенных на использовании квадратов полиномов Лежандра первого и второго порядка, а также для исходного критерия Неймана – Бартона (NB).

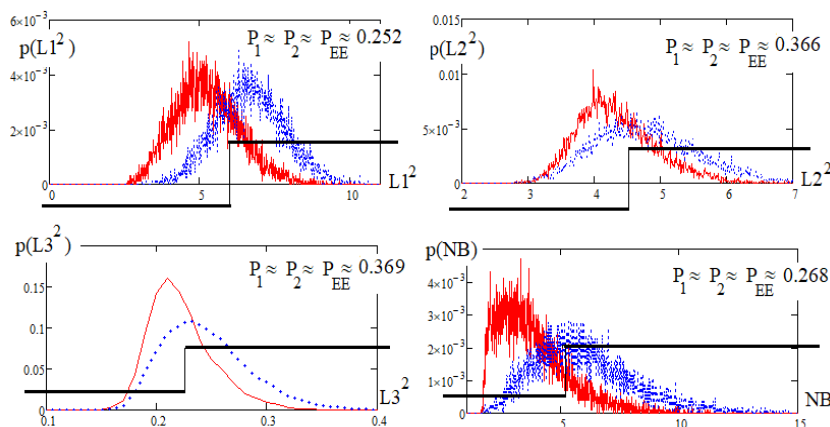


Рис. 2.27. Распределения откликов статистических критериев для квадратов трех первых полиномов Лежандра и критерия Неймана – Бартона

Для того, чтобы от трех новых статистических критериев $L1^2$, $L2^2$, $L3^2$ перейти к эквивалентным им искусственным нейронам, необходимо их выходные состояния нормальных данных и равномерных данных разделить квантователем с одним порогом сравнения. При этом мы имеем вероятности ошибок у двух новых статистических критериев $\{L2, L1^2\}$ меньше, чем у классического критерия Неймана – Бартона, собранного из трех первых полиномов. Более того, из трех критериев низкого качества $\{L13, L2^2, L3^2\}$ мы можем собрать еще один третий нейросетевой критерий более высокого качества $L123$.

2.4.2. Мультипликативное объединение полиномов Лежандра с классическим статистическим критерием Васичека

2.4.2.1. Совместное численное моделирование критерия Васичека и оптимизированного полинома Лежандра второго порядка

Существующие статистические критерии ведут себя по-разному в разных условиях. Для того, чтобы их сравнивать между собой, необходимо приводить их к одинаковым условиям. Очевидно, что при сравнении должны использоваться выборки одинакового размера. Кроме того, желательно выполнить симметризацию задачи по выбору порога принятия решения через выравнивание вероятностей появления ошибок первого и второго рода. Будем рассматривать задачу анализа малых выборок в 16 опытов для классического статистического критерия Васичека [21]. Будем рассматривать принятия искусственным нейроном Васичека решения о различении малых выборок с альтернативой нормального и равномерного распределения входных данных. Статистики выходных состояний искусственного нейрона отражены на рис. 2.28.

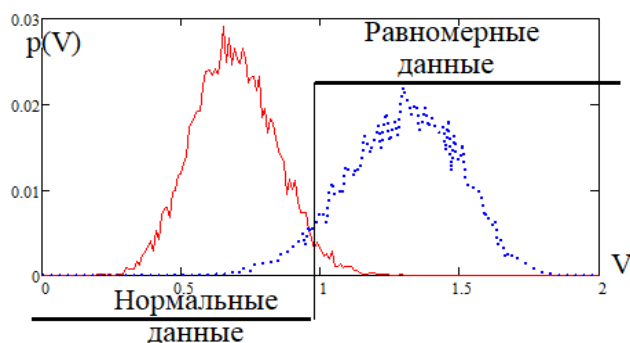


Рис. 2.28. Распределения выходных состояний критерия Васичека и эквивалентного ему искусственного нейрона для малой выборки в 16 опытов

Из рис. 2.28 видно, что при значении порога принятия нейроном $V = 0.94$ вероятности ошибок первого и второго рода оказываются близки и составляют $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.055$, т.е. критерий Васичека является одним из самых мощных классических критериев, созданных в прошлом веке для проверки гипотезы нормального распределения данных малых выборок в 16 опытов. Мощность критерия Васичека оказывается выше хи-квадрат критерия Пирсона в $0.33/0.055 = 6$ раз. Программное обеспечение на языке MathCAD для реализации численного эксперимента моделирования критерия Васичека приведено на рис. 2.29.

$$\begin{array}{l}
 \text{sx}(rr) := \left\{ \begin{array}{l}
 x \leftarrow \text{sort}(\text{mom}(16, 0, 1 + rr)) \\
 x \leftarrow x - x_0 \\
 V4 \leftarrow \left[\prod_{i=0}^{10} (x_{i+4} - x_i) \right]^{\frac{1}{11}} \\
 x \leftarrow \frac{x}{x_{15}} \\
 x \leftarrow 2x - 1 \\
 Le \leftarrow \left| \sum_{i=0}^{15} \left[3.0 \cdot (x_i)^2 - 0.2 \right]^2 \cdot \frac{1}{16} \right| \\
 \left(Le \quad \frac{Le}{V4} \quad V4 \cdot Le \quad V4 \right)
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{sx}(0.01) = (1.651 \quad 2.777 \quad 0.981 \quad 0.594)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{sxr}(rr) := \left\{ \begin{array}{l}
 x \leftarrow \text{sort}(\text{runif}(16, -3 - rr, 3 + rr)) \\
 x \leftarrow x - x_0 \\
 V4 \leftarrow \left[\prod_{i=0}^{10} (x_{i+4} - x_i) \right]^{\frac{1}{11}} \\
 x \leftarrow \frac{x}{x_{15}} \\
 x \leftarrow 2x - 1 \\
 Le \leftarrow \left| \sum_{i=0}^{15} \left[3.0 \cdot (x_i)^2 - 0.2 \right]^2 \cdot \frac{1}{16} \right| \\
 \left(Le \quad \frac{Le}{V4} \quad V4 \cdot Le \quad V4 \right)
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{sxr}(0.01) = (1.907 \quad 1.686 \quad 2.158 \quad 1.131)
 \end{array}$$

Рис. 2.29. Фрагмент программы, воспроизводящей на языке MathCAD отклики нейрона Васичека и оптимизированного полиномиального нейрона Лежандра

2.4.2.2. Моделирование почти ортогональных полиномов Лежандра второго порядка

Следует отметить, что рассмотренная выше ситуация синтеза искусственных нейронов ориентирована на разделение двух типов данных с нормальным и равномерным распределением. В связи с этим нам желательно иметь математические конструкции, изначально оптимизированные под обработку нормальных и равномерных данных. Кроме того, из теории нелинейных динамических объектов [38–41] нам известно о возможности ортогонализации вычислительных процедур. В связи с этим имеет смысл попытаться использовать полиномы Лежандра [42], так как они ортогональны для случайных данных

с равномерным распределением в интервале изменений от -1 до $+1$. Ранее проведенные исследования показали, что снижение размеров выборки биометрических данных размывает эффект ортогонализации полиномов. В связи с этим в работе [42] выполнена оптимизация полинома Лежандра второго порядка, проведенная заменой единичной постоянной составляющей полинома на значение 0.2 (смотри рис. 2.29). Такая оптимизация позволяет снизить вероятности появления ошибок первого и второго рода на 41% до значений $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.262$. На рис. 2.30 приведены распределения выходных состояний почти ортогонального полиномиального нейрона Лежандра второго порядка для малых выборок в 16 опытов.

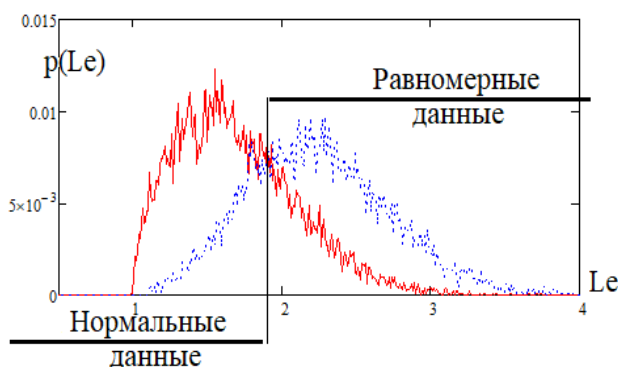


Рис. 2.30. Выходные состояния искусственного оптимизированного полиномиального нейрона Лежандра на малой выборке в 16 опытов

Новый статистический критерий почти ортогонального полинома Лежандра второго порядка имеет мощность в $0.33/0.264 = 1.26$ выше по сравнению с хи-квадрат критерием Пирсона. Тем не менее его прямое использование в нейросетевых корректорах ошибок принятия решений на данный момент не целесообразно.

2.4.2.3. Мультипликативный синтез новых более мощных статистических критериев умножением и делением выходных состояний классического критерия Васичека и полиномиального критерия Лежандра

Одним из вариантов синтеза нового комбинированного критерия является перемножение выходных состояний критерия Лежандра и критерия Васичека. Статистики выходных состояний нового искусственного нейрона отображены на рис. 2.31, программное обеспечение численного эксперимента для исследования нового критерия отображено на рис. 2.29. При пороге квантования $LeV = 1.77$ близкие вероятности ошибок первого и второго рода составляют $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.092$.

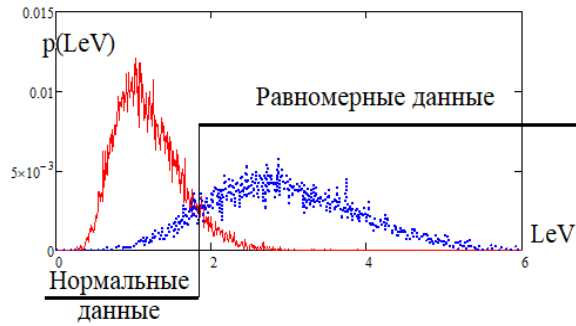


Рис. 2.31. Выходные состояния искусственного нейрона, синтезированного умножением полинома Лежандра на отклик критерия Васичека на выборке в 16 опытов

Вторым вариантом синтеза нового статистического критерия является деление отклика критерия Лежандра на отклик критерия Васичека. Выходные состояния нового искусственного нейрона отображены на рис. 2.32. При пороге квантования $Le/V = 2.05$ близкие вероятности ошибок первого и второго рода составляют $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.262$.

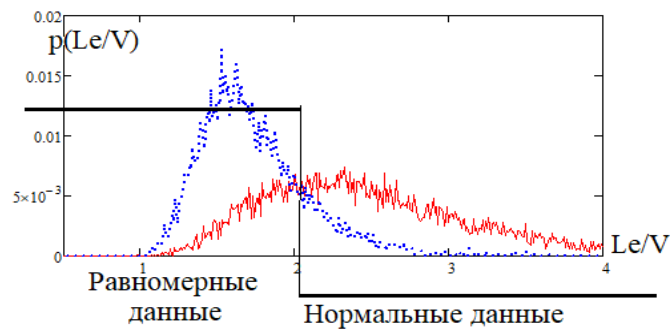


Рис. 2.32. Выходные состояния искусственного нейрона, синтезированного делением полинома Лежандра на отклик критерия Васичека на малой выборке в 16 опытов

Таким образом, в дополнение к достаточно мощному критерию Васичека мы получили два новых дополнительных статистических критериев с мощностью выше, чем у входящего в них исходного критерия Лежандра (см. рис. 2.30).

2.4.2.4. Синтез нейросетевого корректора ошибок с тройной кодовой избыточностью для разделения данных малых выборок с нормальным и равномерным распределениями

Очевидным является то, что простейшие коды свертывания кодовой избыточности голосованием разрядов малоэффективны

по сравнению с более сложными кодовыми конструкциями [7]. Вопрос состоит только в том, как научиться создавать более сложные кодовые конструкции для нейронных сетей, обобщающих группы статистических критериев. При этом выигрыш от перехода к более сложным кодовым конструкциям всегда будет расти с ростом кодовой избыточности [36, 37].

В рассматриваемом нами случае объединяются всего два критерия: статистический критерий Васичека и статистический критерий Лежандра. Построить на двух критериях простейший корректор нельзя. Однако если мы из двух критериев создадим четыре критерия, то можем взять три самых мощных критерия и построить на них простейший сверточный самокорректирующийся код, устраняющий трехкратную избыточность. Структура организации этого кода отображена на рис. 2.33.

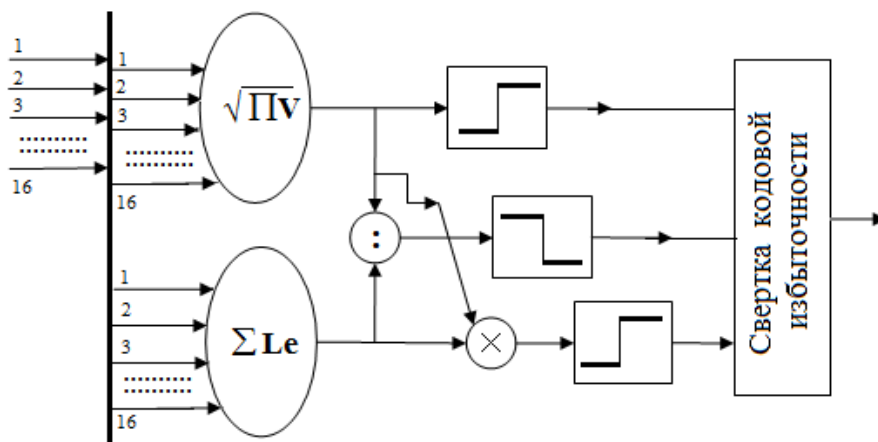


Рис. 2.33. Параллельная обработка данных тремя статистическими критериями с синтезом обнаружителя и корректора ошибок с тройной кодовой избыточностью

Таким образом, мы получаем возможность за счет нелинейных операций перемножения и деления выходных состояний двух статистических критериев создавать достаточно сложную конструкцию, способную эффективно обнаруживать и исправлять ошибочные кодовые состояния. Это позволяет снизить вероятность ошибок по сравнению с лучшим одиночным критерием Васичека $P_{EE} \approx 0.055$ до итоговой вероятности $P_{EE} \approx 0.011$. Эффект достигается объединением трех статистических критериев. Для рассмотренной самокорректирующейся кодовой конструкции с трехкратной избыточностью удастся достичь пятикратного снижения вероятности появления ошибок. Последнее является подтверждением высокой эффективности рассмотренного в статье направления по мультипликативному объединению уже известных и новых статистических критериев.

2.4.3. Варианты производных полиномов Лежандра, полученных перемножением с дифференцированием и интегрированием входных данных случайной выборки

2.4.3.1. Произведение полинома Лежандра первого порядка и интеграла входных данных малой выборки

Рассмотрим произведение значений первого полинома Лежандра (линейной функции) с простейшим интегралом (суммой двух соседних отсчетов). Программное обеспечение воспроизведения этого типа функционала отражено в левой части рис. 2.34. В правой части этого рисунка даны распределения плотностей вероятности эквивалентного искусственного нейрона.

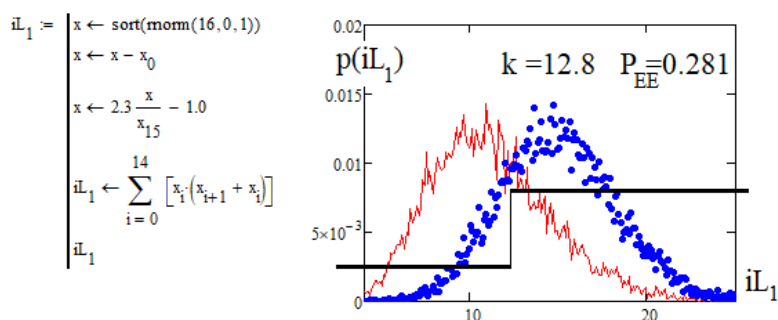


Рис. 2.34. Произведение полинома Лежандра первого порядка с простейшим интегралом входных данных

Новый критерий проверки гипотезы равномерности распределения данных малых выборок в 16 опытах имеет разные коэффициенты корреляции с иными классическими критериями. Коэффициенты корреляции приведены в следующей ниже таблице:

Таблица коэффициентов корреляции

$\text{corr}(iL_1, \text{KfM}) = 0.509$	$\text{corr}(iL_1, \text{MT}) = 0.81786$	$\text{corr}(iL_1, \text{Fr}) = 0.332826$	$\text{corr}(iL_1, \text{G}) = 0.341369$
$\text{corr}(iL_1, \chi^2) = 0.474421$	$\text{corr}(iL_1, \text{ASR}) = -0.09849$	$\text{corr}(iL_1, \mu_4) = -0.372513$	$\text{corr}(iL_1, \text{S}) = 0.11633$
$\text{corr}(iL_1, \text{SKfM}) = 0.433571$	$\text{corr}(iL_1, \text{R}) = 0.178365$	$\text{corr}(iL_1, \text{Rs}) = -0.713103$	$\text{corr}(iL_1, \text{mdx}) = -0.427894$
$\text{corr}(iL_1, \text{KS}) = 0.460479$	$\text{corr}(iL_1, \text{LS}) = -0.504445$	$\text{corr}(iL_1, \text{HU}) = -0.488644$	$\text{corr}(iL_1, \text{Em}) = -0.327913$
$\text{corr}(iL_1, \text{AD}) = 0.483567$	$\text{corr}(iL_1, \text{W}) = 0.168722$	$\text{corr}(iL_1, \text{V5}) = 0.579696$	$\text{corr}(iL_1, \text{L}) = -0.140246$

2.4.3.2. Произведения полиномов Лежандра первого и второго порядка и производной входных случайных данных малой выборки

Одним из способов синтеза новых статистических полиномиальных критериев является перемножение полиномов под знаком суммы.

На рис. 2.35 приведена подобная математическая конструкция, усиленная дополнительным умножением на производную входных данных.

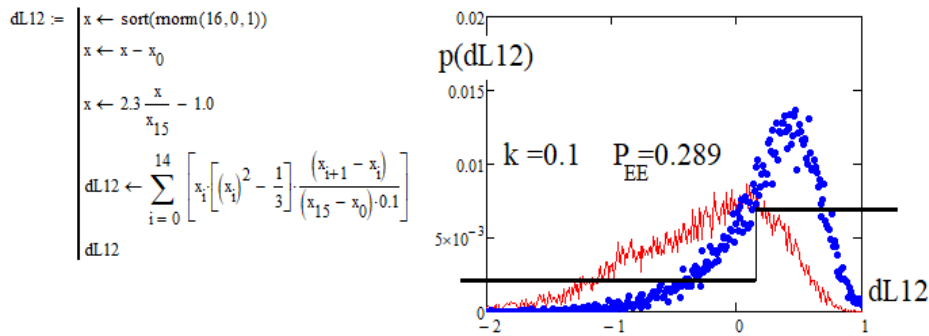


Рис. 2.35. Произведение первого и второго полиномов Лежандра на дифференциал входных данных

Новый критерий проверки гипотезы равномерности распределения данных малых выборок в 16 опытах имеет разные коэффициенты корреляции с иными классическими критериями. Коэффициенты корреляции приведены в следующей ниже таблице:

Таблица коэффициентов корреляции

$\text{corr}(dL12, KfM) = 0.325$	$\text{corr}(dL12, MT) = 0.5586$	$\text{corr}(dL12, Fr) = -0.07684$	$\text{corr}(dL12, G) = 0.00386$
$\text{corr}(dL12, \chi^2) = 0.2364$	$\text{corr}(dL12, ASR) = 0.1484$	$\text{corr}(dL12, \mu_4) = -0.74909$	$\text{corr}(dL12, S) = -0.40891$
$\text{corr}(dL12, SKfM) = -0.0407$	$\text{corr}(dL12, R) = -0.374$	$\text{corr}(dL12, Rs) = -0.81549$	$\text{corr}(dL12, mdx) = -0.11534$
$\text{corr}(dL12, KS) = 0.0218$	$\text{corr}(dL12, LS) = 0.01782$	$\text{corr}(dL12, HU) = 0.03757$	$\text{corr}(dL12, Em) = -0.72751$
$\text{corr}(dL12, AD) = 0.02092$	$\text{corr}(dL12, W) = -0.15319$	$\text{corr}(dL12, V5) = 0.75904$	$\text{corr}(dL12, L) = -0.48102$

2.4.3.3. Произведение полиномов Лежандра первого и второго порядка с интегрированием входных случайных данных малой выборки

По аналогии с синтезом предыдущего нового статистического критерия мы можем выполнить синтез следующего статистического критерия, заменив операцию вычисления первой производной на операцию вычисления простейшего интеграла. На рис. 2.36 приведено описание подобной математической конструкции.

К сожалению, все три рассмотренных выше критерия принадлежат одной группе и имеют сильную корреляционную сцепленность: $\text{corr}(iL_1, \{dL12, iL12\}) = \{0.509, 0.909\}$, $\text{corr}(dL12, iL12) = 0.435$. Все это делает их совместное использование проблематичным.

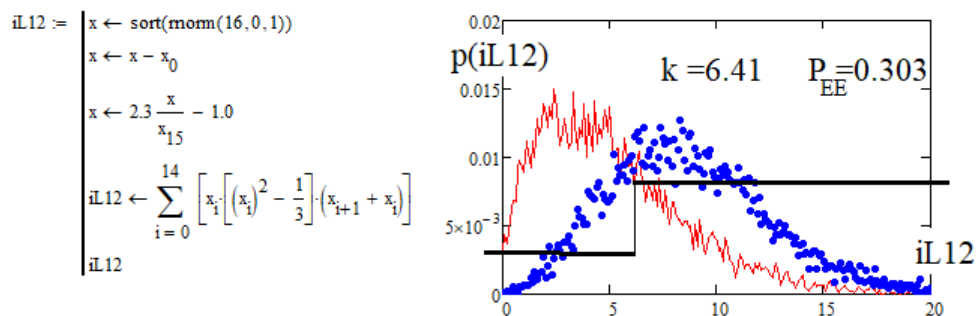


Рис. 2.36. Произведение первого и второго полиномов Лежандра на дифференциал входных данных

Положительным признаком является то, что таблицы коэффициентов корреляции трех последних критериев с классическими критериями существенно различаются:

Таблица коэффициентов корреляции

$\text{corr}(iL12, \text{KfM}) = 0.413$	$\text{corr}(iL12, \text{MT}) = 0.7614$	$\text{corr}(iL12, \text{Fr}) = 0.2698$	$\text{corr}(iL12, \text{G}) = 0.2898$
$\text{corr}(iL12, \chi^2) = 0.399$	$\text{corr}(iL12, \text{ASR}) = -0.0891$	$\text{corr}(iL12, \mu_4) = -0.2997$	$\text{corr}(iL12, \text{S}) = 0.22918$
$\text{corr}(iL12, \text{SKfM}) = 0.3365$	$\text{corr}(iL12, \text{R}) = 0.1746$	$\text{corr}(iL12, \text{Rs}) = -0.6089$	$\text{corr}(iL12, \text{mdx}) = -0.3678$
$\text{corr}(iL12, \text{KS}) = 0.3712$	$\text{corr}(iL12, \text{LS}) = -0.5813$	$\text{corr}(iL12, \text{HU}) = -0.4056$	$\text{corr}(iL12, \text{Em}) = -0.2882$
$\text{corr}(iL12, \text{AD}) = 0.4001$	$\text{corr}(iL12, \text{W}) = 0.1447$	$\text{corr}(iL12, \text{V5}) = 0.49079$	$\text{corr}(iL12, \text{L}) = 0.00509$

2.4.4. Частично ортогональная статистическая обработка данных за счет использования полиномов Эрмита частично ортогональных для малых выборок нормальных данных

2.4.4.1. Искусственный нейрон, построенный на критерии квадрата второго полинома Эрмита частично ортогонального для нормальных входных данных

Очевидно, что преимуществами полиномиальных частично ортогональных нейронов удастся воспользоваться только в том случае, когда весовая функция той или иной системы ортогональных полиномов совпадает с плотностью распределения входных случайных данных. Впервые это показали в 1965 г. Ли и Шецен [43, 44]

при ортогонализации решения задачи идентификации ядер Вольтера низкого порядка. Этот же принцип был применен и при использовании иных случайных данных с иными плотностями входных значений распределения [38–41]. Важным является также то, что этот тип процедуры ортогонализации может быть обобщен на достаточно сложные симметричные модели нелинейных динамических объектов [41, 45]. В конечном итоге процедуры могут быть обобщены на сети искусственных нейронов [46].

Для нас важным является то, что полиномы Лежандра оптимизированы под равномерное распределение входных данных. Если же мы будем использовать гипотезу нормального распределения входных данных, то необходимо переходить к полиномам Эрмита.

Самый простой статистический критерий этого класса строится как сумма квадратов полинома Эрмита второго порядка. На рис. 2.37 даны вычислительные преобразования нового критерия и статистики его выходных состояний.

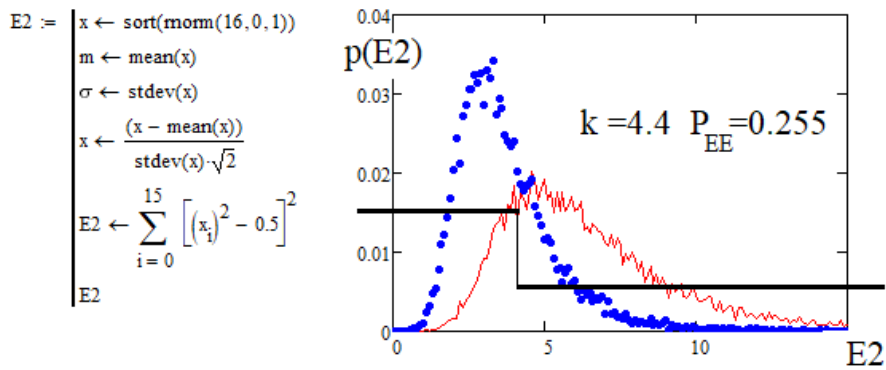


Рис. 2.37. Искусственный нейрон квадрата второго полинома Эрмита

Коэффициенты корреляции откликов нового критерия с откликами классических критериев даны ниже:

Таблица коэффициентов корреляции

$\text{corr}(E2, \text{KfM}) = -0.087$	$\text{corr}(E2, \text{MT}) = -0.4044$	$\text{corr}(E2, \text{Fr}) = 0.2021$	$\text{corr}(E2, \text{G}) = 0.08719$
$\text{corr}(E2, \chi^2) = -0.0567$	$\text{corr}(E2, \text{ASR}) = -0.1979$	$\text{corr}(E2, \mu_4) = 1$	$\text{corr}(E2, \text{S}) = 0.42665$
$\text{corr}(E2, \text{SKfM}) = 0.1946$	$\text{corr}(E2, \text{R}) = 0.5657$	$\text{corr}(E2, \text{Rs}) = 0.8224$	$\text{corr}(E2, \text{mdx}) = 0.1301$
$\text{corr}(E2, \text{KS}) = 0.0629$	$\text{corr}(E2, \text{LS}) = -0.0084$	$\text{corr}(E2, \text{HU}) = -0.3484$	$\text{corr}(E2, \text{Em}) = 0.9204$
$\text{corr}(E2, \text{AD}) = 0.121$	$\text{corr}(E2, \text{W}) = 0.26578$	$\text{corr}(E2, \text{V5}) = -0.87297$	$\text{corr}(E2, \text{L}) = 0.44837$

2.4.4.2. Искусственный нейрон эквивалентный критерию, построенному на произведении первого и третьего полиномов Эрмита

Еще одну математическую конструкцию, пригодную для синтеза нового критерия, можно получить перемножением под знаком суммы первого и третьего полиномов Эрмита (рис. 2.38).

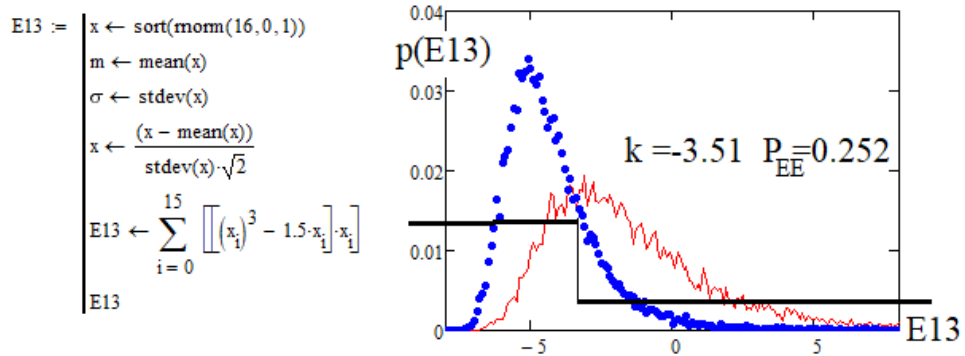


Рис. 2.38. Искусственный нейрон, полученный произведением первого и третьего полиномов Эрмита

Коэффициенты корреляции откликов этого нового критерия и иных классических статистических критериев даны ниже:

Таблица коэффициентов корреляции

$\text{corr}(E13, \text{KfM}) = -0.096$	$\text{corr}(E13, \text{MT}) = -0.4122$	$\text{corr}(E13, \text{Fr}) = 0.2024$	$\text{corr}(E13, \text{G}) = 0.08249$
$\text{corr}(E13, \chi^2) = -0.094$	$\text{corr}(E13, \text{ASR}) = -0.2102$	$\text{corr}(E13, \mu_4) = 1$	$\text{corr}(E13, \text{S}) = 0.44283$
$\text{corr}(E13, \text{SKfM}) = 0.1898$	$\text{corr}(E13, \text{R}) = 0.5789$	$\text{corr}(E13, \text{Rs}) = 0.8284$	$\text{corr}(E13, \text{mdx}) = 0.13$
$\text{corr}(E13, \text{KS}) = 0.0597$	$\text{corr}(E13, \text{LS}) = -0.01156$	$\text{corr}(E13, \text{HU}) = -0.3221$	$\text{corr}(E13, \text{Em}) = 0.9188$
$\text{corr}(E13, \text{AD}) = 0.1103$	$\text{corr}(E13, \text{W}) = 0.29345$	$\text{corr}(E13, \text{V5}) = -0.87452$	$\text{corr}(E13, \text{L}) = 0.46751$

2.4.4.3. Искусственный нейрон эквивалентный критерию, построенному на квадрате четвертого полинома Эрмита

Третий вариант нового класса полиномиальных нейронов Эрмита получается возведением в квадрат полинома Эрмита четвертого порядка под знаком суммы. Этот нейрон дает ощутимое снижение доверительной вероятности к принимаемым решениям (рис. 2.39). Последнее, видимо, связано с ростом порядка полинома, накапливаемых сумматором данных. Первые два критерия накапливают состояния

полиномов четвертого порядка, а последний третий критерий выполняет накопление данных, обработанных полиномами восьмого порядка. Этот эффект хорошо виден по данным табл. 2.1.

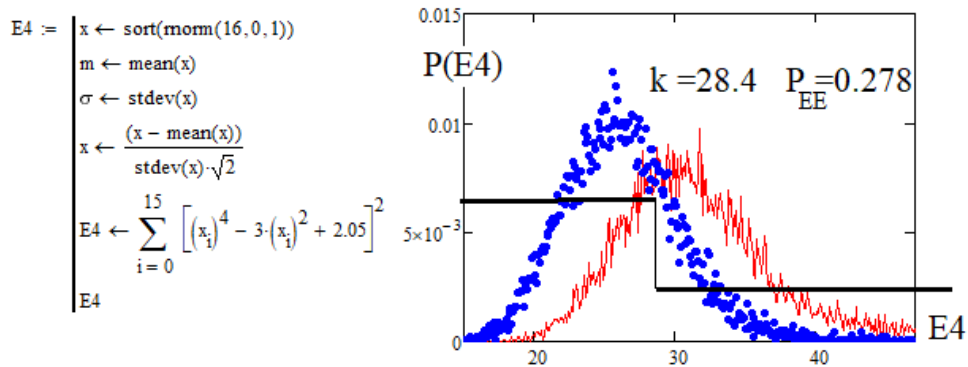


Рис. 2.39. Искусственный нейрон, построенный накоплением квадрата откликов полинома Эрмита четвертого порядка

Коэффициенты корреляции откликов сумматора нового нейрона E4 и откликов сумматоров иных нейронов, эквивалентных классическим статистическим критериям приведены ниже:

Таблица коэффициентов корреляции

$\text{corr}(E4, \text{KfM}) = 0.048$	$\text{corr}(E4, \text{MT}) = -0.219$	$\text{corr}(E4, \text{Fr}) = 0.1814$	$\text{corr}(E4, \text{G}) = 0.10193$
$\text{corr}(E4, \chi^2) = 0.1064$	$\text{corr}(E4, \text{ASR}) = -0.13$	$\text{corr}(E4, \mu_4) = 0.819$	$\text{corr}(E4, \text{S}) = 0.25499$
$\text{corr}(E4, \text{SKfM}) = 0.1912$	$\text{corr}(E4, \text{R}) = 0.602$	$\text{corr}(E4, \text{Rs}) = 0.5161$	$\text{corr}(E4, \text{mdx}) = 0.0726$
$\text{corr}(E4, \text{KS}) = 0.108$	$\text{corr}(E4, \text{LS}) = 0.01593$	$\text{corr}(E4, \text{HU}) = -0.4468$	$\text{corr}(E4, \text{Em}) = 0.6569$
$\text{corr}(E4, \text{AD}) = 0.1507$	$\text{corr}(E4, \text{W}) = 0.23735$	$\text{corr}(E4, \text{V5}) = -0.56916$	$\text{corr}(E4, \text{L}) = 0.23836$

2.4.4.4. Искусственный нейрон эквивалентный критерию, построенному на мультипликативном объединении трех первых полиномиальных критериев Эрмита

Важно отметить, что коэффициенты корреляции откликов сумматоров в группе искусственных нейронов Эрмита малы: $\text{corr}(E2, \{E13, E4\}) = \{0.0028, -0.0034\}$. Это позволяет надеяться на возможный поиск удачных их совместных обобщений. Первый вариант подобного обобщения может быть построен через вычисление среднего геометрического (рис. 2.40).

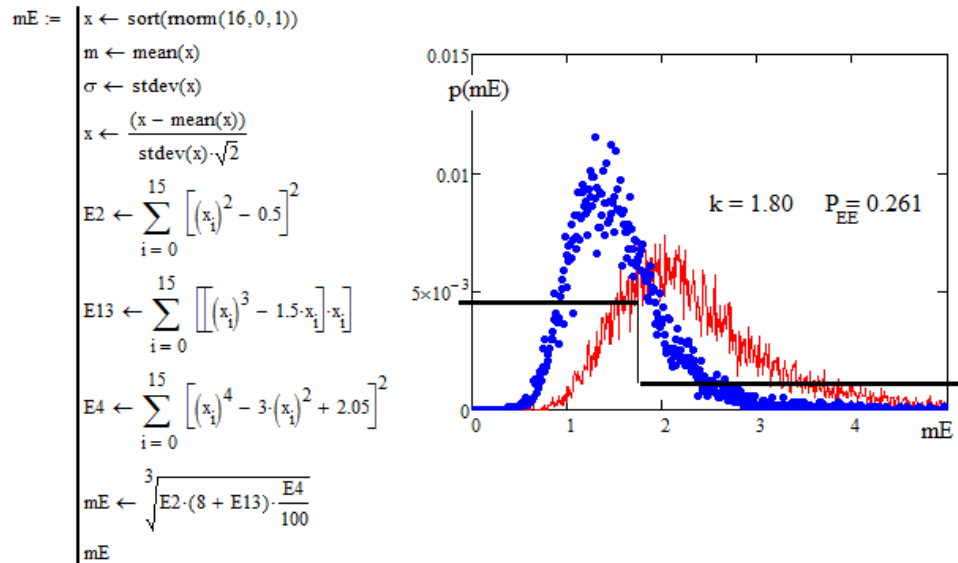


Рис. 2.40. Попытка обобщения трех статистических критериев Эрмита, вычислением среднего геометрического

К сожалению, мы не наблюдаем сколько-нибудь существенного увеличения доверительной вероятности обобщения средним геометрическим. Видимо, это связано с близостью друг к другу корреляционных матриц трех обобщаемых компонент. В работах [41, 52] показано, что близкие значения корреляционных матриц должны давать близкие значения их эквивалентных полностью симметризованных корреляционных матриц. При этом полная симметризация корреляционных матриц, когда все коэффициенты корреляции вне диагонали матрицы одинаковы, может быть выполнена простым усреднением их модулей. Практически одинаковые вероятности ошибок у трех обобщаемых критериев с практически одинаковыми эквивалентными полностью симметричными корреляционными матрицами исключают возможность обобщения результатов через вычисление среднего геометрического:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(mE, KfM) = -0.025$	$\text{corr}(mE, MT) = -0.3176$	$\text{corr}(mE, Fr) = 0.4014$	$\text{corr}(mE, G) = 0.24138$
$\text{corr}(mE, \chi^2) = -0.0871$	$\text{corr}(mE, ASR) = -0.3664$	$\text{corr}(mE, \mu_4) = 0.8584$	$\text{corr}(mE, S) = 0.73802$
$\text{corr}(mE, SKfM) = 0.4179$	$\text{corr}(mE, R) = 0.8666$	$\text{corr}(mE, Rs) = 0.7195$	$\text{corr}(mE, mdx) = -0.12$
$\text{corr}(mE, KS) = 0.2706$	$\text{corr}(mE, LS) = -0.43141$	$\text{corr}(mE, HU) = -0.272$	$\text{corr}(mE, Em) = 0.7887$
$\text{corr}(mE, AD) = 0.2991$	$\text{corr}(mE, W) = 0.42099$	$\text{corr}(mE, V5) = -0.74311$	$\text{corr}(mE, L) = 0.68856$

2.4.4.5. Искусственный нейрон эквивалентный критерию, построенному на аддитивном объединении трех первых полиномиальных критериев Эрмита

Еще одним простым способом обобщения трех статистических критериев Эрмита является приведение их к одному масштабу и усреднение. Программное обеспечение для воспроизведения соответствующего численного эксперимента и его результаты приведены на рис. 2.41.

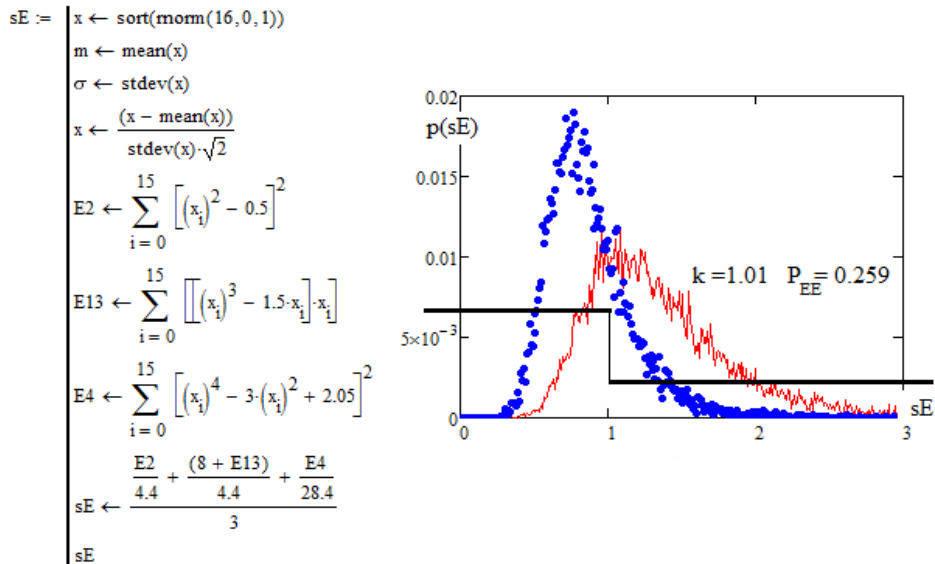


Рис. 2.41. Попытка обобщения трех статистических критериев Эрмита вычислением среднего

К сожалению, мы не наблюдаем сколько-нибудь существенного увеличения доверительной вероятности обобщения трех критериев вычислением среднего. Причина та же – практически полное совпадение вероятностей ошибок и высокий уровень нелинейных корреляционных связей или корреляционных связей более высоких размерностей:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(sE, KfM) = 0.09$	$\text{corr}(sE, MT) = -0.1205$	$\text{corr}(sE, Fr) = 0.4759$	$\text{corr}(sE, G) = 0.33045$
$\text{corr}(sE, \chi^2) = 0.0359$	$\text{corr}(sE, ASR) = -0.3703$	$\text{corr}(sE, \mu_4) = 0.6725$	$\text{corr}(sE, S) = 0.75162$
$\text{corr}(sE, SKfM) = 0.5227$	$\text{corr}(sE, R) = 0.9427$	$\text{corr}(sE, Rs) = 0.493$	$\text{corr}(sE, mdx) = -0.2553$
$\text{corr}(sE, KS) = 0.3698$	$\text{corr}(sE, LS) = -0.58423$	$\text{corr}(sE, HU) = -0.3152$	$\text{corr}(sE, Em) = 0.6084$
$\text{corr}(sE, AD) = 0.421$	$\text{corr}(sE, W) = 0.44474$	$\text{corr}(sE, V5) = -0.52646$	$\text{corr}(sE, L) = 0.65228$

2.4.4.6. Сеть искусственных нейронов, построенная на свертывании кодовой избыточности трех первых полиномиальных нейронов Эрмита

Выходом из создавшегося положения является разрушение линейных корреляционных связей высоких размерностей квантователями выходных состояний трех искусственных нейронов. На рис. 2.42 приведен фрагмент программы, воспроизводящей работу трех искусственных нейронов. Следует отметить, что для экономии места часть строк программного кода рис. 2.42 опущена (эти строки точно повторяют строки двух предыдущих программ).

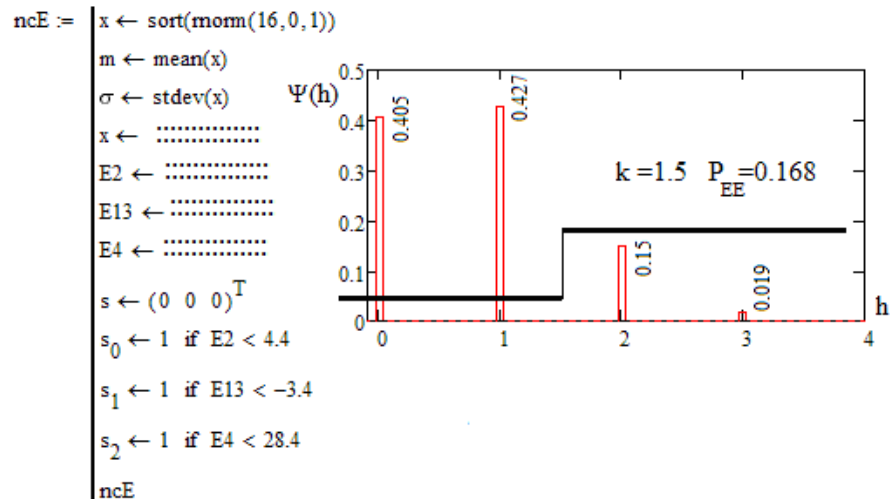


Рис. 2.42. Программный эмулятор выходного кода сети из трех искусственных нейронов простейших полиномов Эрмита

На каждое случайное состояние, порождаемое первой строкой кода, программа (рис. 2.42) откликается кодом из трех разрядов. С вероятностью 0.405 нейросеть будет откликаться кодом «000». Коды с единицей в одном из разрядов будут появляться с вероятностью 0.427, т.е. свертывание трехкратной избыточности нейросети Эрмита должно снизить вероятность появления ошибок до величины 0.168. Это примерно в полтора раза ниже вероятности ошибок лучшего из трех полиномиальных критериев. Мы наблюдаем ощутимое улучшение качества решений, принимаемых сетью из трех искусственных нейронов Эрмита.

Попутно заметим, что спектр выходных кодовых состояний нейросети всегда дискретен. Спектр выходных состояний расстояний Хэмминга также всегда дискретен, каждая линия спектра $\Psi(h)$ имеет смысл амплитуды вероятности появления одной из линий расстояний Хэмминга. Расстояние Хэмминга вычисляется подсчетом числа единиц в выходном коде.

2.4.4.7. Искусственный нейрон, построенный на мультипликативном объединении суммы модулей полинома Эрмита четвертого порядка с критерием среднего гармонического

Следует отметить, что, кроме получения критериев суммированием квадратов полиномов Эрмита (см. рис. 2.40), можно пойти по иному пути суммирования модулей полиномов Эрмита четвертого порядка. Эта ситуация иллюстрируется рис. 2.43. При этом критерий, полученный на базе того или иного полинома Эрмита, может быть мультипликативно усилен другим критерием, например критерием среднего гармонического [47]. Эта ситуация также отражена на рис. 2.43.

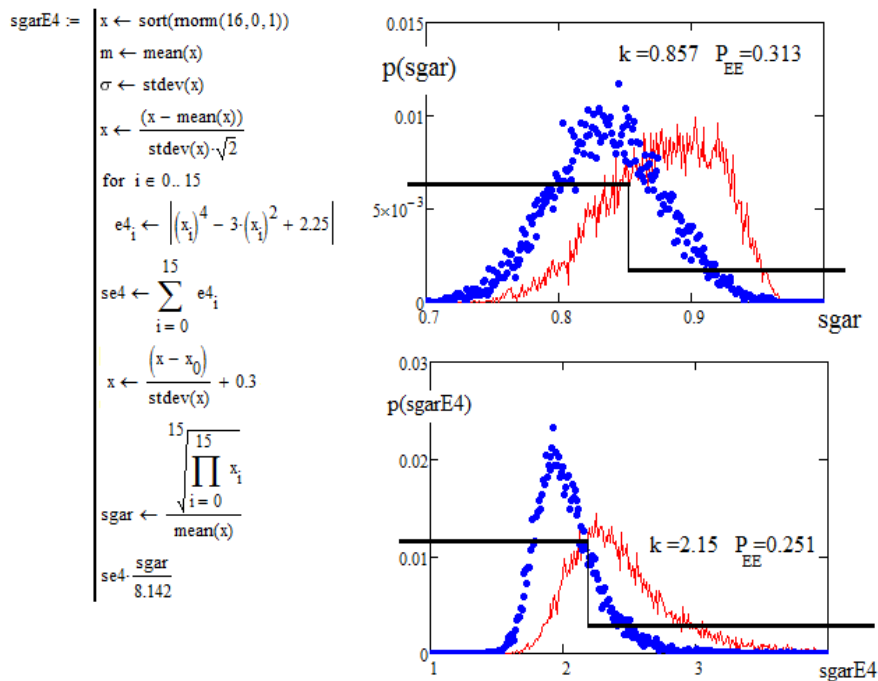


Рис. 2.43. Взаимное усиление критерия суммы модулей четвертого полинома Эрмита, мультипликативно объединенного с критерием среднего гармонического [47]

Из рис. 2.43 видно, что произведение двух критериев обеспечивает значение вероятностей ошибок $P_{EE} \approx 0.251$. Это существенно меньше, чем дают оба критерия при их использовании отдельно.

Корреляционная сцепленность нового критерия с классическими критериями остается достаточно высокой. Шесть классических критериев имеют модули коэффициентов корреляции в интервале от 0.5 до 0.89:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{KfM}) = -0.101$	$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{MT}) = -0.4054$	$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{Fr}) = 0.2711$	$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{G}) = 0.1313$
$\text{corr}(\text{sgarE4}, \chi^2) = -0.172$	$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{ASR}) = -0.2887$	$\text{corr}(\text{sgarE4}, \mu_4) = 0.9634$	$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{S}) = 0.63552$
$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{SKfM}) = 0.2584$	$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{R}) = 0.6599$	$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{Rs}) = 0.8736$	$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{mdx}) = 0.0311$
$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{KS}) = 0.1168$	$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{LS}) = -0.22916$	$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{HU}) = -0.2095$	$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{Em}) = 0.8913$
$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{AD}) = 0.1553$	$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{W}) = 0.34361$	$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{V5}) = -0.88898$	$\text{corr}(\text{sgarE4}, \text{L}) = 0.68388$

2.4.5. Частично ортогональная статистическая обработка данных за счет использования полиномов Лагерра

2.4.5.1. Искусственные нейроны, полученные из четырех первых почти ортогональных полиномов Лагерра

Одним из перспективных направлений исследований является использование полиномов Лагерра как основы для синтеза новых статистических критериев. В правой части рис. 2.44 приведено программное обеспечение численного эксперимента по синтезу трех статистических критериев на основе полиномов Лагерра.

В правой части рис. 2.44 (верхняя часть рисунка) отображены результаты, полученные моделированием критерия, построенного на использовании полинома Лагерра второго порядка. В центре правой части рисунка отображены результаты, полученные при моделировании произведения полинома первого порядка и третьего порядка. В нижней правой части рисунка даны результаты численного моделирования критерия, построенного на использовании полинома Лагерра четвертого порядка.

Как видно из рисунка, каждый из трех новых статистических критериев обеспечивает низкий уровень ошибок первого и второго рода, если его заменить эквивалентным искусственным нейроном. Однако использовать три новых статистических критерия в одной группе нецелесообразно из-за высокого уровня их корреляционной сцепленности. По этой причине нельзя добиться ощутимого повышения достоверной вероятности принимаемых решений при усреднении данных, при вычислении среднего геометрического, при нейросетевом объединении статистических критериев.

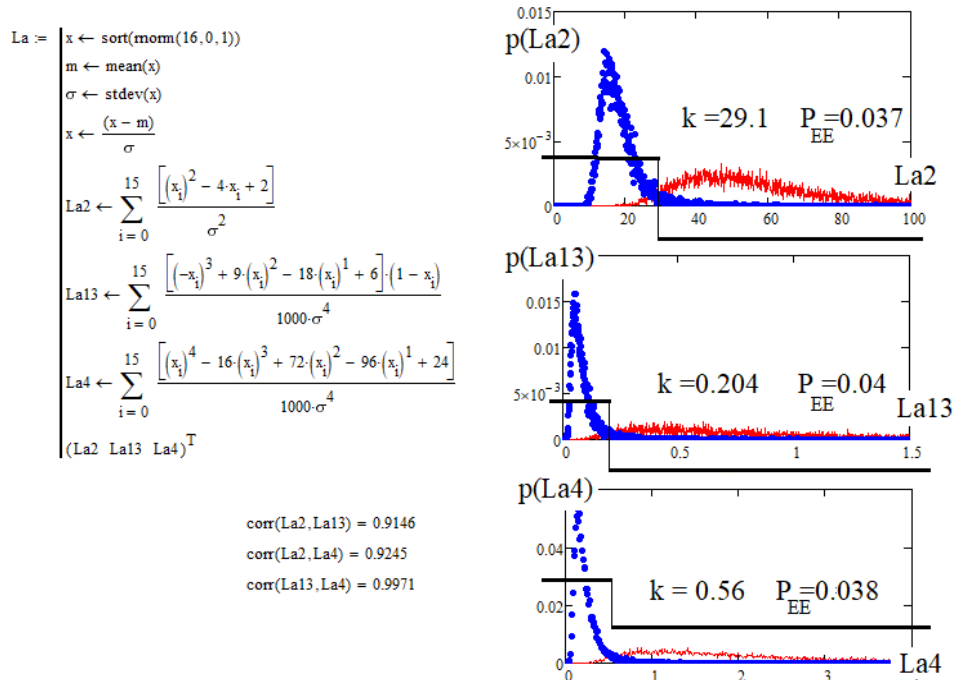


Рис. 2.44. Три разных статистических критерия, полученных через использование четырех первых полиномов Лагерра

Корреляционные связи критерия La2 с другими классическими критериями приведены ниже:

Корреляционная сцепленность критерия второго полинома Лагерра La2 с классическими критериями

$\text{corr}(\text{La2}, \text{KfM}) = -0.0023$	$\text{corr}(\text{La2}, \text{MT}) = -0.0029$	$\text{corr}(\text{La2}, \text{Fr}) = -0.0038$	$\text{corr}(\text{La2}, \text{G}) = -0.00387$
$\text{corr}(\text{La2}, \chi^2) = -0.0164$	$\text{corr}(\text{La2}, \text{ASR}) = -0.0034$	$\text{corr}(\text{La2}, \mu_4) = -0.0061$	$\text{corr}(\text{La2}, \text{S}) = 0.01105$
$\text{corr}(\text{La2}, \text{SKfM}) = -0.0068$	$\text{corr}(\text{La2}, \text{R}) = 0.0104$	$\text{corr}(\text{La2}, \text{Rs}) = -0.0054$	$\text{corr}(\text{La2}, \text{mdx}) = 0.0077$
$\text{corr}(\text{La2}, \text{KS}) = -0.0058$	$\text{corr}(\text{La2}, \text{LS}) = -0.01339$	$\text{corr}(\text{La2}, \text{HU}) = 0.009$	$\text{corr}(\text{La2}, \text{Em}) = -0.0111$
$\text{corr}(\text{La2}, \text{AD}) = -0.0077$	$\text{corr}(\text{La2}, \text{W}) = -0.01019$	$\text{corr}(\text{La2}, \text{V5}) = 0.00705$	$\text{corr}(\text{La2}, \text{L}) = 0.0029$

Корреляционные связи критерия La13 с другими классическими критериями приведены ниже:

Корреляционная сцепленность критерия произведения первого и третьего полиномов Лагерра - La13 с классическими критериями

$\text{corr}(\text{La13}, \text{KfM}) = 0.115$	$\text{corr}(\text{La13}, \text{MT}) = 0.0664$	$\text{corr}(\text{La13}, \text{Fr}) = 0.6073$	$\text{corr}(\text{La13}, \text{G}) = 0.4182$
$\text{corr}(\text{La13}, \chi^2) = -0.0117$	$\text{corr}(\text{La13}, \text{ASR}) = -0.4967$	$\text{corr}(\text{La13}, \mu_4) = 0.0988$	$\text{corr}(\text{La13}, \text{S}) = 0.7898$
$\text{corr}(\text{La13}, \text{SKfM}) = 0.6785$	$\text{corr}(\text{La13}, \text{R}) = 0.6451$	$\text{corr}(\text{La13}, \text{Rs}) = 0.1009$	$\text{corr}(\text{La13}, \text{mdx}) = -0.5278$
$\text{corr}(\text{La13}, \text{KS}) = 0.5343$	$\text{corr}(\text{La13}, \text{LS}) = -0.8414$	$\text{corr}(\text{La13}, \text{HU}) = -0.008$	$\text{corr}(\text{La13}, \text{Em}) = 0.095$
$\text{corr}(\text{La13}, \text{AD}) = 0.5097$	$\text{corr}(\text{La13}, \text{W}) = 0.4691$	$\text{corr}(\text{La13}, \text{V5}) = -0.105$	$\text{corr}(\text{La13}, \text{L}) = 0.6647$

Далее приведены корреляционные связи критерия La4 с другими классическими критериями:

Корреляционная сцепленность критерия четвертого полинома Лагерра - La4 с классическими критериями

$\text{corr}(\text{La4}, \text{KfM}) = 0.1286$	$\text{corr}(\text{La4}, \text{MT}) = 0.0899$	$\text{corr}(\text{La4}, \text{Fr}) = 0.6193$	$\text{corr}(\text{La4}, \text{G}) = 0.44$
$\text{corr}(\text{La4}, \chi^2) = 0.0139$	$\text{corr}(\text{La4}, \text{ASR}) = -0.4966$	$\text{corr}(\text{La4}, \mu_4) = 0.1056$	$\text{corr}(\text{La4}, \text{S}) = 0.7758$
$\text{corr}(\text{La4}, \text{SKfM}) = 0.6888$	$\text{corr}(\text{La4}, \text{R}) = 0.6364$	$\text{corr}(\text{La4}, \text{Rs}) = 0.0842$	$\text{corr}(\text{La4}, \text{mdx}) = -0.5362$
$\text{corr}(\text{La4}, \text{KS}) = 0.559$	$\text{corr}(\text{La4}, \text{LS}) = -0.8426$	$\text{corr}(\text{La4}, \text{HU}) = -0.047$	$\text{corr}(\text{La4}, \text{Em}) = 0.0992$
$\text{corr}(\text{La4}, \text{AD}) = 0.5318$	$\text{corr}(\text{La4}, \text{W}) = 0.4733$	$\text{corr}(\text{La4}, \text{V5}) = -0.0935$	$\text{corr}(\text{La4}, \text{L}) = 0.6541$

2.4.5.2. Искусственный нейрон, полученный умножением критерия Крамера – фон Мизеса с критерием полинома Лагерра второго порядка

Еще одним перспективным направлением работ является мультипликативное объединение возможностей классических критериев с частично ортогональными полиномами Лагерра [48]. Например, может быть выполнено мультипликативное объединение с критерием Крамера – фон Мизеса. Гибридный критерий, как это следует из данных рис. 2.45, по вероятностям ошибок оказывается лучше критерия KfM примерно в 6 раз, но хуже критерия L2 примерно в полтора раза.

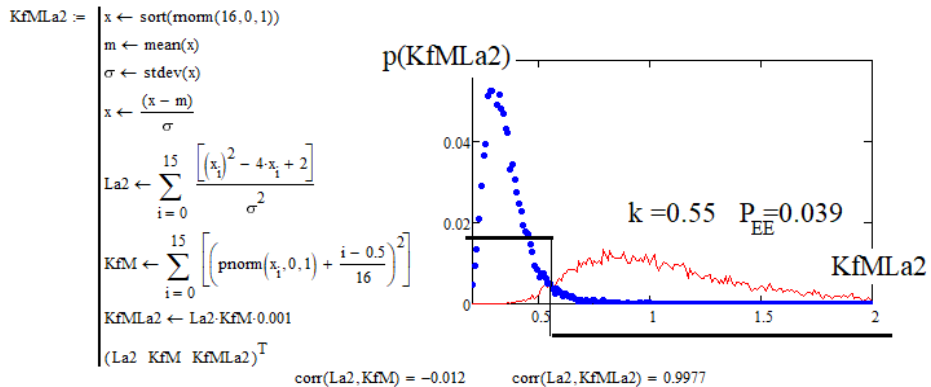


Рис. 2.45. Мультипликативный гибридный критерий KfM и критерия второго полинома Лагерра

Из рис. 2.45 следует, что мультипликативный гибридный критерий накопленных полиномов Лагерра второго порядка с накопленными полиномами Крамера – фон Мизеса дает рост вероятностей ошибок примерно в полтора раза. При этом существенно ослабляется корреляционная связь между наиболее сильным критерием полинома Лагерра и итоговым гибридом:

Корреляционная сцепленность критерия произведения второго полинома Лагерра - La2 и критерия KfM с классическими критериями

corr(La2KfM, KfM) = 1	corr(La2KfM, MT) = 0.5778	corr(La2KfM, Fr) = 0.3901	corr(La2KfM, G) = 0.429
corr(La2KfM, χ^2) = 0.5526	corr(La2KfM, ASR) = 0.0063	corr(La2KfM, μ_4) = -0.1178	corr(La2KfM, S) = 0.0468
corr(La2KfM, SKfM) = 0.4754	corr(La2KfM, R) = 0.0699	corr(La2KfM, Rs) = -0.3567	corr(La2KfM, mdx) = -0.1585
corr(La2KfM, KS) = 0.412	corr(La2KfM, LS) = -0.1876	corr(La2KfM, HU) = -0.6506	corr(La2KfM, Em) = -0.1334
corr(La2KfM, AD) = 0.5771	corr(La2KfM, W) = 0.1632	corr(La2KfM, V5) = 0.1087	corr(La2KfM, L) = -0.1149

2.4.5.3. Искусственный нейрон, полученный умножением полиномов Крамера – фон Мизеса с модулем полинома Лагерра второго порядка (второго рода) перед накоплением данных

Перемножение сумм полиномов, описанное в предыдущем разделе, и суммирование перемноженных полиномов формируют совершенно разные функционалы:

Корреляционная сцепленность произведения модуля второго полинома Лагерра - La2 и полинома KfM под знаком суммы с классическими критериями

corr(La2KfM2, KfM) = -0.0563	corr(La2KfM2, MT) = -0.0969	corr(La2KfM2, Fr) = -0.1575	corr(La2KfM2, G) = -0.2424
corr(La2KfM2, χ^2) = -0.0892	corr(La2KfM2, ASR) = -0.3448	corr(La2KfM2, μ_4) = 0.1284	corr(La2KfM2, S) = 0.1566
corr(La2KfM2, SKfM) = -0.0879	corr(La2KfM2, R) = 0.0989	corr(La2KfM2, Rs) = 0.1478	corr(La2KfM2, mdx) = -0.6997
corr(La2KfM2, KS) = -0.0013	corr(La2KfM2, LS) = -0.1049	corr(La2KfM2, HU) = 0.0506	corr(La2KfM2, Em) = 0.1115
corr(La2KfM2, AD) = -0.1634	corr(La2KfM2, W) = -0.1102	corr(La2KfM2, V5) = -0.1331	corr(La2KfM2, R) = 0.0989

Программная реализация нового критерия приведена в левой части рис. 2.46. В левой части рисунка приводятся результаты численного эксперимента.

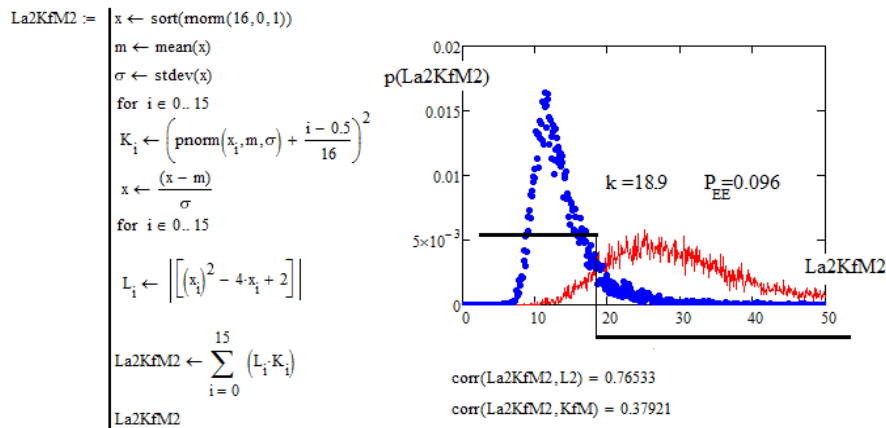


Рис. 2.46. Гибридный критерий, полученный произведением модулей полиномов Лежандра второго порядка с квадратичными полиномами Крамера – фон Мизеса

2.4.5.4. Искусственный нейрон, полученный перемножением критерия Гири с критерием полинома Лагерра второго порядка

Критерии, построенные на использовании частично ортогональных полиномов Лагерра, интересны тем, что удобны для их объединения с классическими статистическими критериями. В качестве примера для такой операции хорошо подходит классический критерий Гири. На рис. 2.47 приведено программное обеспечение и результаты численного объединения критерия второго полинома Лежандра и критерия Гири.

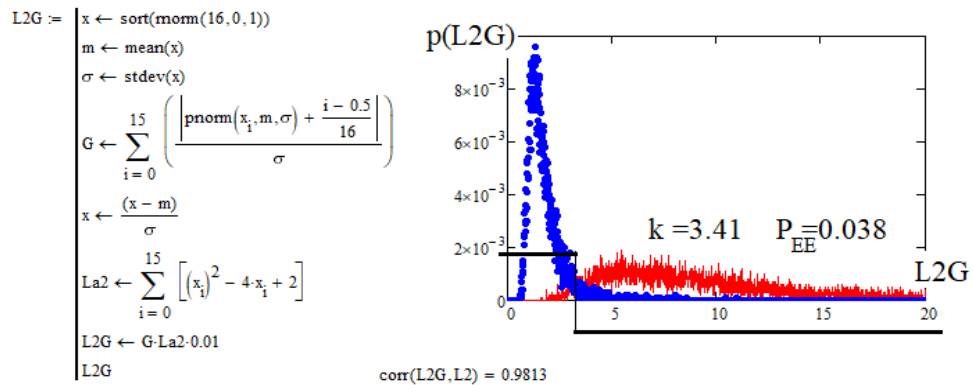


Рис. 2.47. Гибридный критерий, полученный произведением критерия Лежандра второго порядка с критерием Гири

Гибрида двух таких критериев вполне достаточно, если речь идет о синтезе простых преобразователей биометрии в короткий код длиной 5 бит. Для более сложных нейросетевых преобразователей придется использовать более сложные кодонейросетевые конструкции с коррекцией ошибок. Корреляционная сцепленность нового критерия с классическими критериями высокая. Критерии {SKfM, AD, Fr, G} имеют большие значения модулей коэффициентов корреляции:

Корреляционная сцепленность произведения критерия второго полинома Лагерра - La2 и критерия Гири с классическими критериями

corr(La2G, KfM) = 0.4292	corr(La2G, MT) = 0.2165	corr(La2G, Fr) = 0.951	corr(La2G, G) = 1
corr(La2G, χ ²) = 0.2792	corr(La2G, ASR) = 0.4071	corr(La2G, μ4) = 0.0872	corr(La2G, S) = 0.3383
corr(La2G, SKfM) = 0.8227	corr(La2G, R) = 0.279	corr(La2G, Rs) = -0.0428	corr(La2G, mdx) = -0.259
corr(La2G, KS) = 0.4668	corr(La2G, LS) = -0.365	corr(La2G, HU) = -0.3539	corr(La2G, Em) = 0.0577
corr(La2G, AD) = 0.9025	corr(La2G, W) = 0.7863	corr(La2G, V5) = -0.0919	corr(La2G, L) = 0.2141

2.4.5.5. Искусственный нейрон, полученный перемножением полиномов Гири с полиномом Лагерра второго порядка (второго рода) перед накоплением данных

При мультипликативном объединении двух критериев возникает сильная корреляционная зависимость нового критерия с наиболее сильным входным критерием (критерием Лагерра). Ослабить сильную корреляционную зависимость удастся, если выполнить перемножение полиномов Гири и полиномов Лагерра до выполнения суммирования. Эту возможность иллюстрирует рис. 2.48.

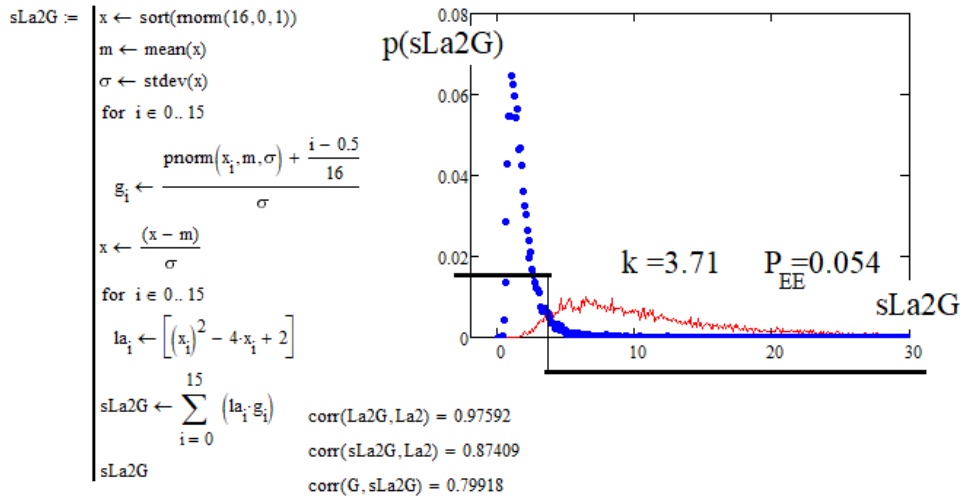


Рис. 2.48. Гибридный критерий, полученный произведением полиномов Лагерра второго порядка с полиномами Гири

Если предыдущий критерий имел высокий уровень корреляционной сцепленности с классическими критериями {SKfM, AD, Fr, G}, то переход в пространство перемножения полиномов до их суммирования кардинально меняет ситуацию. Работоспособными оказываются практически все пары, образованные новым критерием и классическими критериями:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями гибрида, полученного произведением полиномов Лагерра второго порядка и полиномов Гири перед их суммированием

corr(sLa2G, KfM) = -0.3033	corr(sLa2G, G) = 0.068	corr(sLa2G, μ4) = 0.811	corr(sLa2G, R) = 0.592
corr(sLa2G, LS) = -0.3519	corr(sLa2G, χ2) = -0.3362	corr(sLa2G, Rs) = 0.8338	corr(sLa2G, S) = 0.7121
corr(sLa2G, SKfM) = 0.22	corr(sLa2G, AD) = 0.05	corr(sLa2G, HU) = 0.0734	corr(sLa2G, L) = 0.7604
corr(sLa2G, KS) = 0.03478	corr(sLa2G, Fr) = 0.2533	corr(sLa2G, V5) = -0.795	corr(sLa2G, W) = 0.319
corr(sLa2G, MT) = -0.527	corr(sLa2G, mdx) = -0.042	corr(sLa2G, LS) = -0.3519	corr(sLa2G, Em) = 0.738

2.4.5.6. Искусственный нейрон, полученный перемножением критерия Гири с критерием произведения полиномов Лагерра первого и третьего порядков

При разномножении классических критериев не обязательно использовать второй полином Лагерра. Вместо него может использоваться произведение первого и третьего полиномов, как это отражено на рис. 2.49.

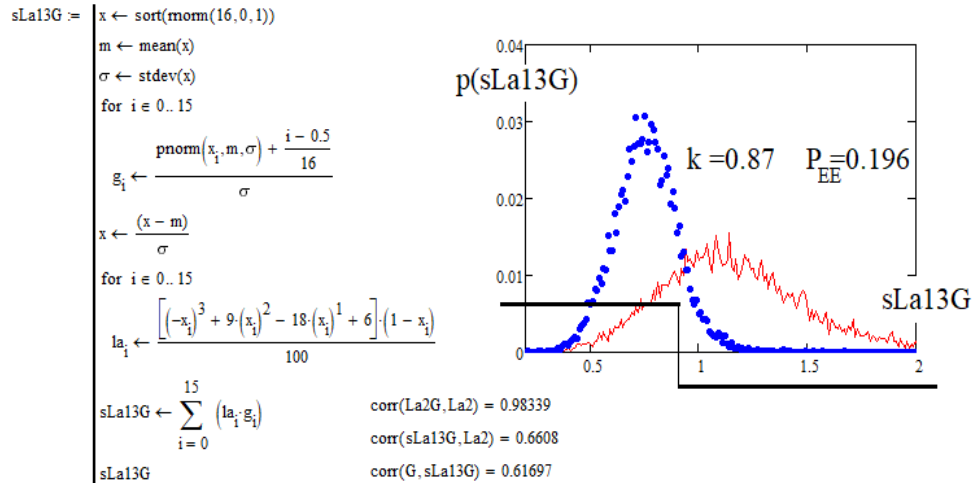


Рис. 2.49. Гибридный критерий, полученный произведением полиномов Лагерра первого и третьего порядка с полиномами Гири

К сожалению, при замене второго полинома на произведение первого и третьего полиномов в два раза увеличивается порядок результирующего полинома. Это приводит к ощутимому повышению вероятности ошибок нового критерия:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями гибрида, полученного произведением полиномов Лагерра третьего и первого порядков, умноженных на полиномы Гири перед их суммированием (накапливанием)

$\text{corr}(sLa13G, KfM) = -0.3077$	$\text{corr}(sLa13G, G) = -0.073$	$\text{corr}(sLa13G, \mu_4) = 0.697$	$\text{corr}(sLa13G, R) = 0.547$
$\text{corr}(sLa13G, LS) = -0.361$	$\text{corr}(sLa13G, \chi^2) = -0.4338$	$\text{corr}(sLa13G, Rs) = 0.7766$	$\text{corr}(sLa13G, S) = 0.6347$
$\text{corr}(sLa13G, SKfM) = -0.111$	$\text{corr}(sLa13G, AD) = -0.159$	$\text{corr}(sLa13G, HU) = 0.2001$	$\text{corr}(sLa13G, L) = 0.7468$
$\text{corr}(sLa13G, KS) = -0.190726$	$\text{corr}(sLa13G, Fr) = -0.0208$	$\text{corr}(sLa13G, V5) = -0.688$	$\text{corr}(sLa13G, W) = 0.116$
$\text{corr}(sLa13G, MT) = -0.436$	$\text{corr}(sLa13G, mdx) = 0.103$	$\text{corr}(sLa13G, LS) = -0.36103$	$\text{corr}(sLa13G, Em) = 0.665$

2.4.5.7. Искусственный нейрон, полученный перемножением критерия Фроцини с модулем полинома Лагерра второго порядка (второго рода) перед накоплением данных

Похожие эффекты возникают, когда идет синтез новых критериев через мультипликативное объединение полиномов Лагерра с классическим критерием Фроцини [49]. Результаты такого объединения приведены на рис. 2.50.

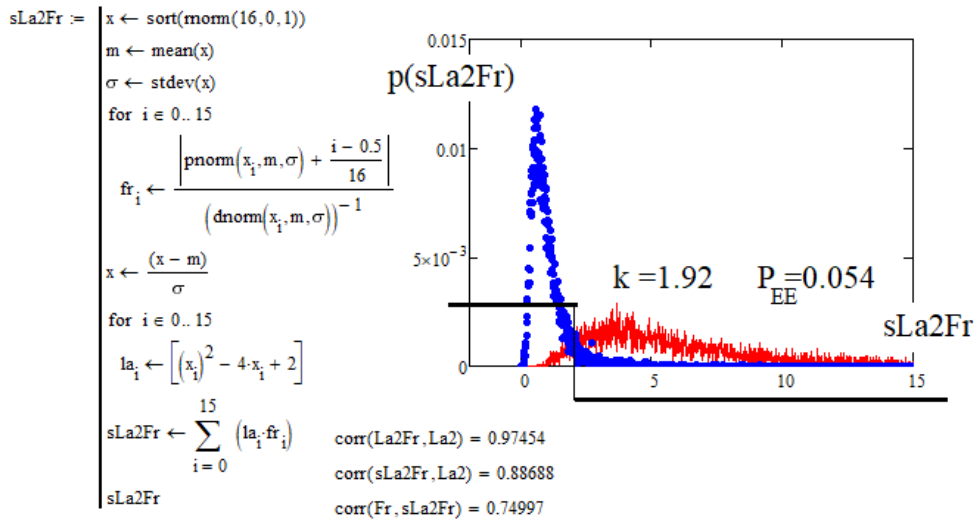


Рис. 2.50. Гибридный критерий, полученный произведением полиномов Лагерра второго порядка с модулями полиномов Фроцини до накопления суммированием

Особенностью этого критерия является низкий уровень вероятности появления ошибок первого и второго рода при одновременном наблюдении низкого уровня корреляционной сцепленности с классическими статистическими критериями:

Корреляционная сцепленность произведения модуля второго полинома Лагерра - La2 и полинома Фроцини - Fr под знаком суммы с классическими критериями

corr(La2Fr2, KfM) = 0.0491	corr(La2Fr2, MT) = -0.0444	corr(La2Fr2, Fr) = 0.0691	corr(La2Fr2, G) = 0.0501
corr(La2Fr2, χ2) = 0.0293	corr(La2Fr2, ASR) = -0.0537	corr(La2Fr2, μ4) = 0.1429	corr(La2Fr2, S) = 0.1128
corr(La2Fr2, SKfM) = 0.076	corr(La2Fr2, R) = 0.0966	corr(La2Fr2, Rs) = 0.103	corr(La2Fr2, mdx) = -0.5723
corr(La2Fr2, KS) = 0.0581	corr(La2Fr2, LS) = -0.0671	corr(La2Fr2, HU) = -0.0925	corr(La2Fr2, Em) = 0.1154
corr(La2Fr2, AD) = 0.0698	corr(La2Fr2, W) = 0.0966	corr(La2Fr2, V5) = -0.1377	corr(La2Fr2, R) = 0.0966

2.4.5.8. Искусственный нейрон, полученный перемножением критерия Фроцини с критерием полинома Лагерра второго порядка

Интересной особенностью объединения полинома Лагерра второго порядка с полиномами Фроцини является то, что мощность двух разных гибридов оказывается близка. Убедиться в этом можно, сравнивая между собой предыдущий и следующий рисунок (рис. 2.51).

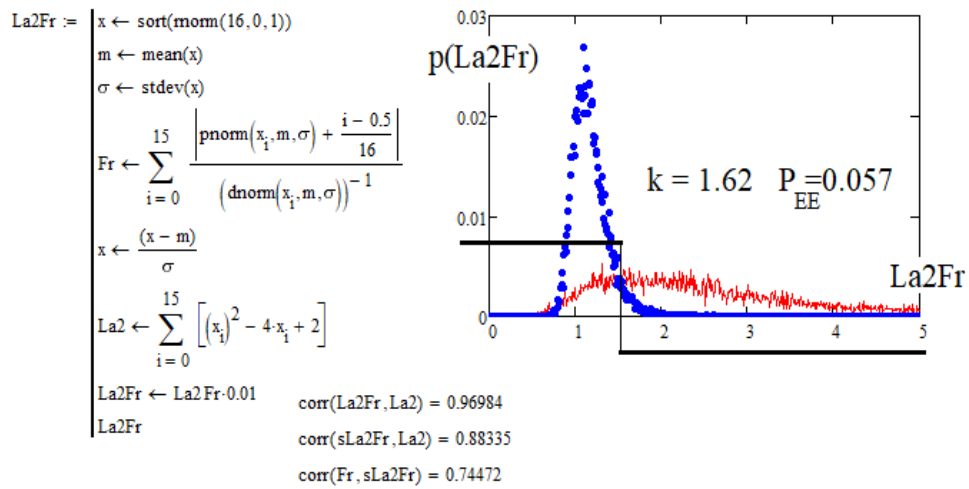


Рис. 2.51. Гибридный критерий, полученный произведением критерия полинома Лагерра второго порядка с критерием Фроцини

К сожалению, классические критерии {SKfM, AD, W, Fr, G} имеют с новым статистическим критерием высокий уровень корреляционной сцепленности:

Корреляционная сцепленность произведения критерия второго полинома Лагерра - La2 и критерия Фроцини - Fr с классическими критериями

$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{KfM}) = 0.3948$	$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{MT}) = 0.13$	$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{Fr}) = 1$	$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{G}) = 0.9492$
$\text{corr}(\text{La2Fr}, \chi^2) = 0.2346$	$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{ASR}) = 0.116$	$\text{corr}(\text{La2Fr}, \mu_4) = 0.2024$	$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{S}) = 0.464$
$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{SKfM}) = 0.9314$	$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{R}) = 0.3921$	$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{Rs}) = 0.0754$	$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{mdx}) = -0.3499$
$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{KS}) = 0.5866$	$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{LS}) = -0.4382$	$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{HU}) = -0.3702$	$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{Em}) = 0.1672$
$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{AD}) = 0.914$	$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{W}) = 0.8455$	$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{V5}) = -0.2131$	$\text{corr}(\text{La2Fr}, \text{L}) = 0.3332$

2.4.5.9. Искусственный нейрон, полученный мультипликативным объединением критерия Мурота – Такеучи с критерием полинома Лагерра второго порядка

Предположительно сильные корреляционные связи возникают, если мы пытаемся объединять критерии, имеющие какие-то глубокие родственные связи (близкие критерии). Если же мы объединяем мало похожие по их строению критерии (далекие критерии), то корреляционные связи оказываются низкими. Этот эффект иллюстрируется на примере объединения полиномов Лагерра и тригонометрических полиномов Мурота – Такеучи (рис. 2.52).

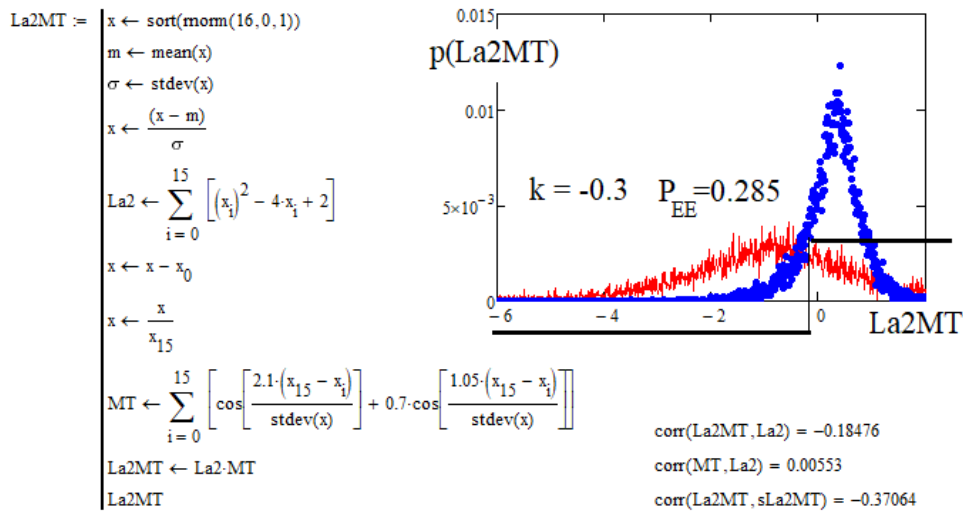


Рис. 2.52. Гибридный критерий, полученный произведением критерия полинома Лагерра второго порядка с критерием Мурота – Такеучи

К сожалению, классические критерии {SKfM, AD, W, Fr, G} имеют с новым статистическим критерием высокий уровень корреляционной сцепленности:

Корреляционная сцепленность произведения критерия второго полинома Лагерра - La2 и критерия Мурота-Такеучи -MT с классическими критериями

corr(La2MT, KfM) = 0.5821	corr(La2MT, MT) = 1	corr(La2MT, Fr) = 0.1185	corr(La2MT, G) = 0.2029
corr(La2MT, χ ²) = 0.4354	corr(La2MT, ASR) = 0.0706	corr(La2MT, μ ₄) = -0.4019	corr(La2MT, S) = -0.0721
corr(La2MT, SKfM) = 0.2068	corr(La2MT, R) = -0.03	corr(La2MT, Rs) = -0.6829	corr(La2MT, mdx) = -0.2662
corr(La2MT, KS) = 0.2805	corr(La2MT, LS) = -0.2775	corr(La2MT, HU) = -0.4651	corr(La2MT, Em) = -0.3546
corr(La2MT, AD) = 0.3293	corr(La2MT, W) = -0.013	corr(La2MT, V5) = 0.5701	corr(La2MT, L) = -0.2232

2.4.6. Вариации на тему синтеза гибридов классических статистических критериев с критерием Колмогорова – Смирнова

2.4.6.1. Гибрид хи-квадрат критерия Пирсона с критерием Колмогорова – Смирнова

Классический критерий Колмогорова – Смирнова фактически является предтечей того, что сегодня принято называть сверточными искусственными нейронами. В связи с широким распространением сегодня сверточных сетей искусственных нейронов рассмотрим гибриды критерия Колмогорова – Смирнова с другими классическими критериями (рис. 2.53).

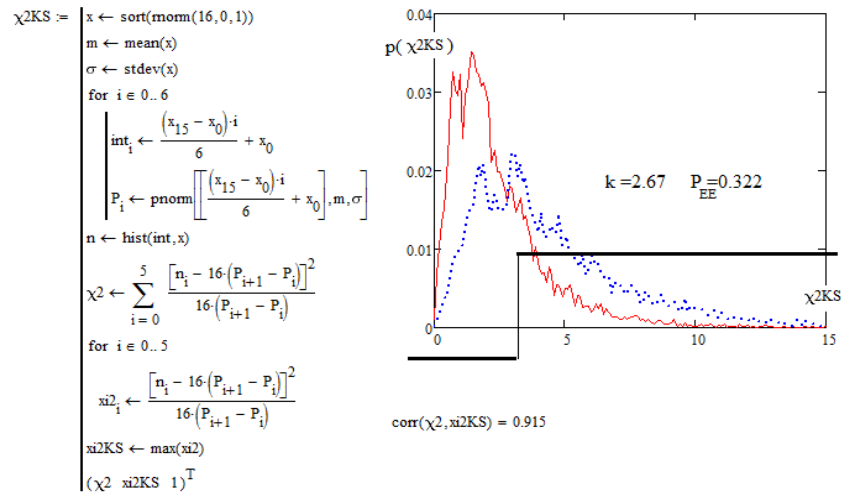


Рис. 2.53. Гибридный критерий, полученный объединением хи-квадрат критерия и критерия Колмогорова – Смирнова

Из рис. 2.53 мы видим, что новый критерий оказывается лучше классического критерия Пирсона по вероятностям ошибок всего на 1 %, что не должно привести в будущем к его востребованности практикой. Корреляционная связь нового критерия с классическим хи-квадрат критерием высокая.

К сожалению, гибрид хи-квадрат критерия и критерия Колмогорова – Смирнова имеет слишком высокий уровень вероятностей ошибок первого и второго рода, что делает его малоперспективным:

Корреляционная сцепленность гибрида хи-квадрат критерия Пирсона и критерием Колмогорова-Смирнов с классическими критериями

$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, KfM) = 0.5162$	$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, MT) = 0.4573$	$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, Fr) = 0.19$	$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, G) = 0.2449$
$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, \chi^2) = 0.9089$	$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, ASR) = 0.0721$	$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, \mu_4) = -0.1145$	$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, S) = -0.171$
$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, SKfM) = 0.2821$	$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, R) = 0.0841$	$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, R_s) = -0.417$	$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, mdx) = -0.0869$
$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, KS) = 0.3748$	$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, LS) = 0.0298$	$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, HU) = -0.6316$	$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, Em) = -0.1559$
$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, AD) = 0.3935$	$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, W) = 0.08348$	$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, V5) = 0.2402$	$\text{corr}(\chi^2_{KKS}, R) = 0.0841$

2.4.6.2. Гибрид критерия Фроцини с критерием Колмогорова – Смирнова

2.4.6.2.1. Гибрид классического критерия Фроцини с критерием Колмогорова – Смирнова

Программа для объединения критерия Фроцини и критерия Колмогорова – Смирнова приведена на рис. 2.54. На этом же рисунке даны результаты численного моделирования.

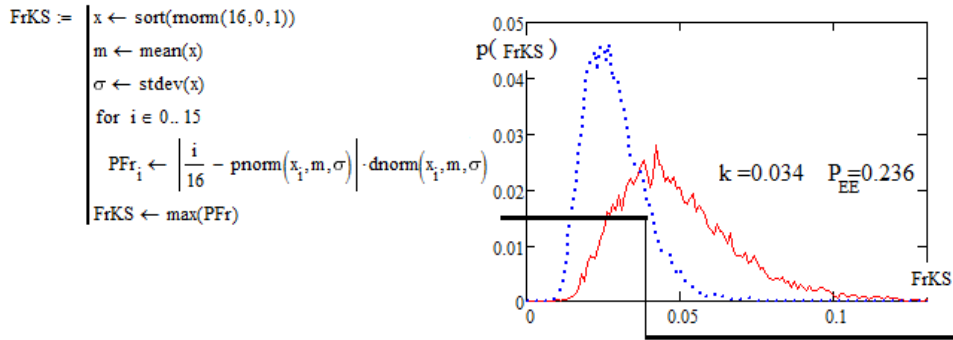


Рис. 2.54. Гибрид классического критерия Фроцини с критерием Колмогорова – Смирнова

Из данных рисунка следует, что вероятность появления ошибок у нового критерия примерно на 25 % хуже, чем у исходного критерия Фроцини, что делает его малоперспективным:

Корреляционная сцепленность классических критериев с гибридом критерия Фроцини и критерия Колмогорова-Смирнова

$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{KfM}) = 0.1255$	$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{MT}) = 0.0306$	$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{Fr}) = 0.4603$	$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{G}) = 0.4424$
$\text{corr}(\text{FrKS}, \chi^2) = 0.0949$	$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{ASR}) = 0.1168$	$\text{corr}(\text{FrKS}, \mu_4) = 0.0763$	$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{S}) = 0.1719$
$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{SKfM}) = 0.4501$	$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{R}) = 0.1464$	$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{Rs}) = 0.0321$	$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{mdx}) = -0.639$
$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{KS}) = 0.3197$	$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{LS}) = -0.1486$	$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{HU}) = -0.1558$	$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{Em}) = 0.0578$
$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{AD}) = 0.4458$	$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{W}) = 0.43703$	$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{V5}) = -0.1088$	$\text{corr}(\text{FrKS}, \text{R}) = 0.1464$

2.4.6.2.2. Гибрид дифференциального варианта критерия Фроцини с критерием Колмогорова – Смирнова

Программа для объединения дифференциального варианта критерия Фроцини и критерия Колмогорова – Смирнова приведена на рис. 2.55. На этом же рисунке даны результаты численного моделирования.

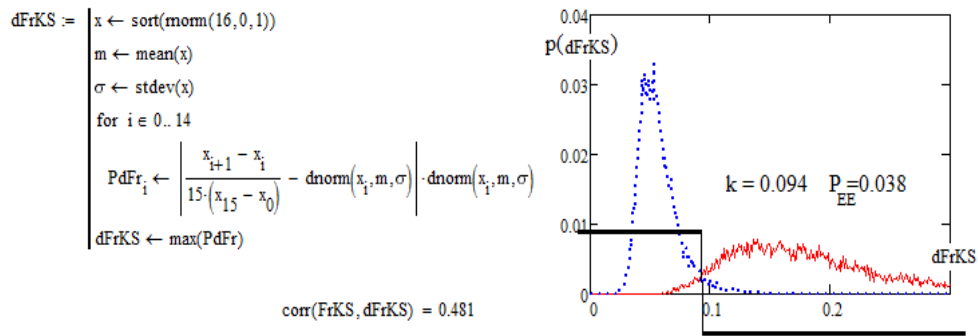


Рис. 2.55. Гибрид дифференциального варианта критерия Фроцини с критерием Колмогорова – Смирнова

Из данных рисунка следует, что вероятность появления ошибок у нового критерия примерно сопоставима с исходным дифференциальным вариантом критерия Фроцини. Это делает новый критерий перспективным. К тому же он имеет низкий уровень корреляционной сцепленности со всеми классическими статистическими критериями:

Корреляционная сцепленность классических критериев с гибридом дифференциального критерия Фроцини и критерия Колмогорова-Смирнова

$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{KfM}) = -0.0163$	$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{MT}) = -0.0063$	$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{Fr}) = 0.5526$	$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{G}) = 0.7109$
$\text{corr}(\text{dFrKS}, \chi^2) = -0.0084$	$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{ASR}) = 0.7795$	$\text{corr}(\text{dFrKS}, \mu_4) = 0.0024$	$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{S}) = -0.0063$
$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{SKfM}) = 0.3114$	$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{R}) = -0.0059$	$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{Rs}) = -0.0025$	$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{mdx}) = 0.0196$
$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{KS}) = -0.0291$	$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{LS}) = 0.0096$	$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{HU}) = 0.0049$	$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{Em}) = 0.0016$
$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{AD}) = 0.4542$	$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{W}) = 0.63318$	$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{V5}) = 0.003$	$\text{corr}(\text{dFrKS}, \text{R}) = -0.0059$

2.4.6.3. Гибрид критерия четвертого статистического момента с критерием Колмогорова – Смирнова

Программа для объединения критерия четвертого статистического момента и критерия Колмогорова – Смирнова приведена на рис. 2.56. На этом же рисунке даны результаты численного моделирования.

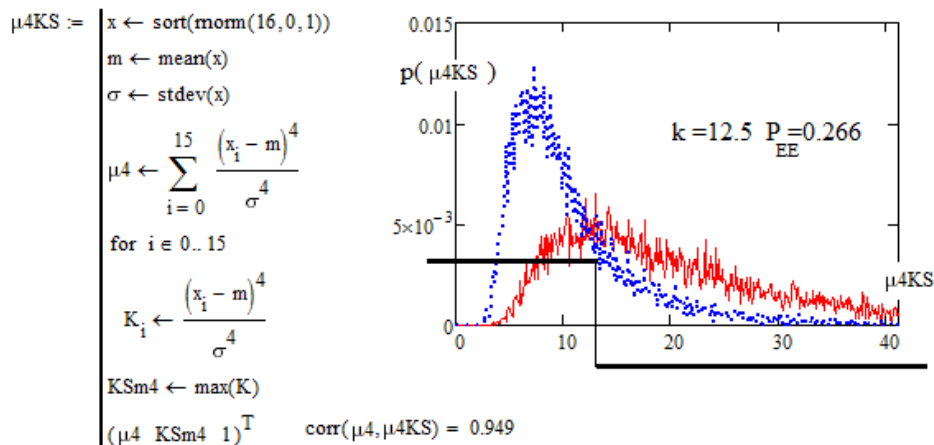


Рис. 2.56. Гибрид четвертого статистического момента с критерием Колмогорова – Смирнова

Из рисунка видно, что гибрид четвертого статистического момента и критерия Колмогорова – Смирнова дает вероятности ошибок 0.266, что примерно на 4,5 % хуже исходного классического критерия. Это делает новый статистический критерий малоперспективным:

Корреляционная сцепленность классических статистических критериев с гибридом четвертого статистического момента - μ_4 и критерием Колмогорова-Смирнова -KS

$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{KfM}) = -0.0465$	$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{MT}) = -0.2585$	$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{Fr}) = 0.2048$	$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{G}) = 0.1041$
$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \chi^2) = -0.036$	$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{ASR}) = -0.1683$	$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \mu_4) = 0.9479$	$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{S}) = 0.3927$
$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{SKfM}) = 0.2063$	$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{R}) = 0.5343$	$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{Rs}) = 0.7292$	$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{mdx}) = 0.0682$
$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{KS}) = 0.0851$	$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{LS}) = -0.032$	$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{HU}) = -0.4021$	$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{Em}) = 0.9584$
$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{AD}) = 0.1459$	$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{W}) = 0.2599$	$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{V5}) = -0.7638$	$\text{corr}(\mu_4\text{KS}, \text{L}) = 0.4023$

2.4.6.4. Гибрид критерия Али – Черго – Ревиса с критерием Колмогорова – Смирнова

2.4.6.4.1. Гибрид классического критерия Али – Черго – Ревиса с критерием Колмогорова – Смирнова

Программа для объединения критерия четвертого статистического момента и критерия Колмогорова – Смирнова приведена на рис. 2.57. На этом же рисунке даны результаты численного моделирования.

Из рисунка видно, что вероятности ошибок первого и второго рода для нового критерия снижаются примерно в 2,4 раза по сравнению с исходным критерием. Это делает применение нового статистического критерия перспективным:

Корреляционная сцепленность классических статистических критериев с гибридом критерия Али-Черго-Ревиса - ASR и критерием Колмогорова-Смирнова -KS

$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{KfM}) = -0.003$	$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{MT}) = 0.0334$	$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{Fr}) = 0.5262$	$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{G}) = 0.7102$
$\text{corr}(\text{ASRKS}, \chi^2) = -0.00032$	$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{ASR}) = 0.8495$	$\text{corr}(\text{ASRKS}, \mu_4) = -0.0765$	$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{S}) = -0.1013$
$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{SKfM}) = 0.2834$	$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{R}) = -0.053$	$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{Rs}) = -0.0574$	$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{mdx}) = 0.02$
$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{KS}) = -0.0439$	$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{LS}) = 0.0654$	$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{HU}) = 0.0437$	$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{Em}) = -0.0487$
$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{AD}) = 0.4381$	$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{W}) = 0.5072$	$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{V5}) = 0.0746$	$\text{corr}(\text{ASRKS}, \text{L}) = -0.0622$

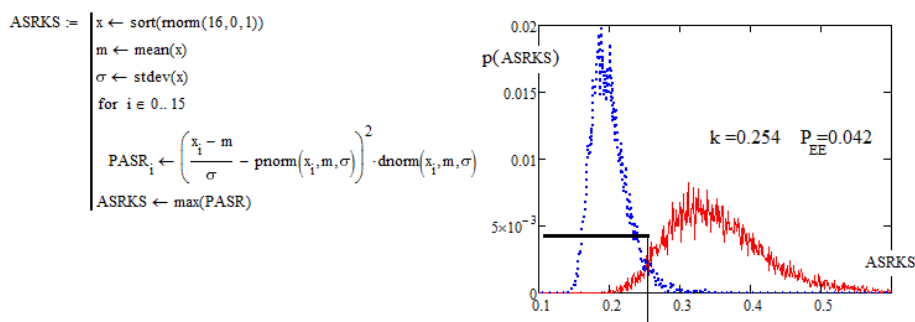


Рис. 2.57. Гибрид критерия Али – Черго – Ревиса с критерием Колмогорова – Смирнова

2.4.6.4.2. Гибрид дифференциального варианта критерия Али – Черго – Ревиса с критерием Колмогорова – Смирнова

Программа для объединения дифференциального варианта критерия Али – Черго – Ревиса и критерия Колмогорова – Смирнова приведена на рис. 2.58. На этом же рисунке даны результаты численного моделирования.

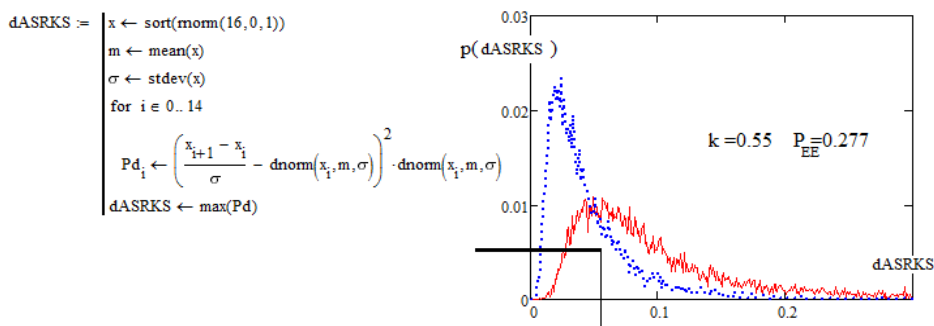


Рис. 2.58. Гибрид дифференциального варианта критерия Али – Черго – Ревиса с критерием Колмогорова – Смирнова

В силу того, что новый статистический критерий значительно потерял качество ($P_{EE} \approx 0.277$) в сравнении с качеством исходного

дифференциального критерия ($P_{EE} \approx 0.101$), новый критерий следует признать малоперспективным:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{KfM}) = -0.052$	$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{G}) = 0.152$	$\text{corr}(\text{dASRKS}, \mu_4) = 0.535$	$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{R}) = -0.056$
$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{LS}) = 0.3936$	$\text{corr}(\text{dASRKS}, \chi^2) = 0.0885$	$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{Rs}) = 0.392$	$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{S}) = -0.132$
$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{SKfM}) = 0.049$	$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{AD}) = 0.092$	$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{HU}) = -0.2924$	$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{L}) = -0.053$
$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{KS}) = -0.0402$	$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{Fr}) = 0.1292$	$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{V5}) = -0.4141$	$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{W}) = 0.208$
$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{MT}) = -0.20487$	$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{mdx}) = 0.2018$	$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{LS}) = 0.3936$	$\text{corr}(\text{dASRKS}, \text{Em}) = 0.442$

2.4.6.4.3. Гибрид интегрального варианта критерия Али – Черго – Ревиса с критерием Колмогорова – Смирнова

Программа для объединения интегрального варианта критерия Али – Черго – Ревиса и критерия Колмогорова – Смирнова приведена на рис. 2.59. На этом же рисунке даны результаты численного моделирования.

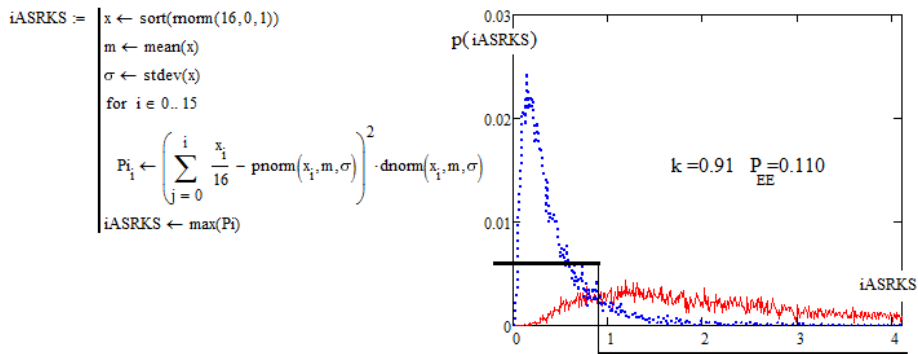


Рис. 2.59. Гибрид интегрального варианта критерия Али – Черго – Ревиса с критерием Колмогорова – Смирнова

В силу того, что новый статистический критерий имеет качество ($P_{EE} \approx 0.110$) в сравнении исходным интегральным критерием ($P_{EE} \approx 0.337$), его следует признать перспективным. Кроме того, новый статистический критерий имеет низкий уровень корреляционной сцепленности со всеми классическими статистическими критериями:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{KfM}) = 0.016$	$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{G}) = 0.167$	$\text{corr}(\text{iASRKS}, \mu_4) = -0.019$	$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{R}) = -0.021$
$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{LS}) = 0.0078$	$\text{corr}(\text{iASRKS}, \chi^2) = -0.0059$	$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{Rs}) = -0.012$	$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{S}) = -0.015$
$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{SKfM}) = 0.057$	$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{AD}) = 0.102$	$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{HU}) = 0.0057$	$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{L}) = -0.012$
$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{KS}) = -0.0096$	$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{Fr}) = 0.1188$	$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{V5}) = 0.0055$	$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{W}) = 0.148$
$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{MT}) = -0.0001$	$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{mdx}) = -0.5553$	$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{LS}) = 0.0078$	$\text{corr}(\text{iASRKS}, \text{Em}) = -0.02$

2.4.6.5. Гибрид критерия Гири с критерием Колмогорова – Смирнова

2.4.6.5.1. Гибрид классического критерия Гири с критерием Колмогорова – Смирнова

Объединение критерия Гири и критерия Колмогорова – Смирнова может быть численно промоделировано программой, приведенной на рис. 2.60.

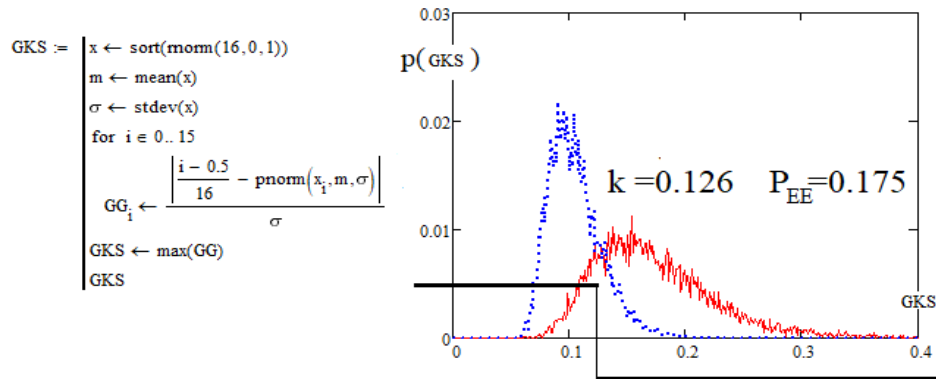


Рис. 2.60. Гибрид классического критерия Гири с критерием Колмогорова – Смирнова

Положительной стороной этого критерия является достаточно низкий уровень вероятности появления ошибок первого и второго рода. К тому же он может использоваться в парах практически со всеми классическими статистическими критериями:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(\text{GKS}, \text{KfM}) = 0.291$	$\text{corr}(\text{GKS}, \text{G}) = 0.862$	$\text{corr}(\text{GKS}, \mu_4) = 0.04$	$\text{corr}(\text{GKS}, \text{R}) = 0.228$
$\text{corr}(\text{GKS}, \text{LS}) = -0.302$	$\text{corr}(\text{GKS}, \chi^2) = 0.316$	$\text{corr}(\text{GKS}, \text{Rs}) = -0.078$	$\text{corr}(\text{GKS}, \text{S}) = 0.269$
$\text{corr}(\text{GKS}, \text{SKfM}) = 0.822$	$\text{corr}(\text{GKS}, \text{AD}) = 0.896$	$\text{corr}(\text{GKS}, \text{HU}) = -0.3868$	$\text{corr}(\text{GKS}, \text{L}) = 0.146$
$\text{corr}(\text{GKS}, \text{KS}) = 0.74$	$\text{corr}(\text{GKS}, \text{Fr}) = 0.8288$	$\text{corr}(\text{GKS}, \text{V5}) = -0.06$	$\text{corr}(\text{GKS}, \text{W}) = 0.67$
$\text{corr}(\text{GKS}, \text{MT}) = 0.224$	$\text{corr}(\text{GKS}, \text{mdx}) = -0.258$	$\text{corr}(\text{GKS}, \text{LS}) = -0.302$	$\text{corr}(\text{GKS}, \text{Em}) = 0.0096$

2.4.6.5.2. Гибрид дифференциального аналога критерия Гири с критерием Колмогорова – Смирнова

Как и в предыдущих случаях, замена классического критерия Гири на его дифференциальный аналог приводит к снижению уровня

вероятностей ошибок первого и второго рода в несколько раз. Это подтверждают результаты численного моделирования, приведенные на рис. 2.61.

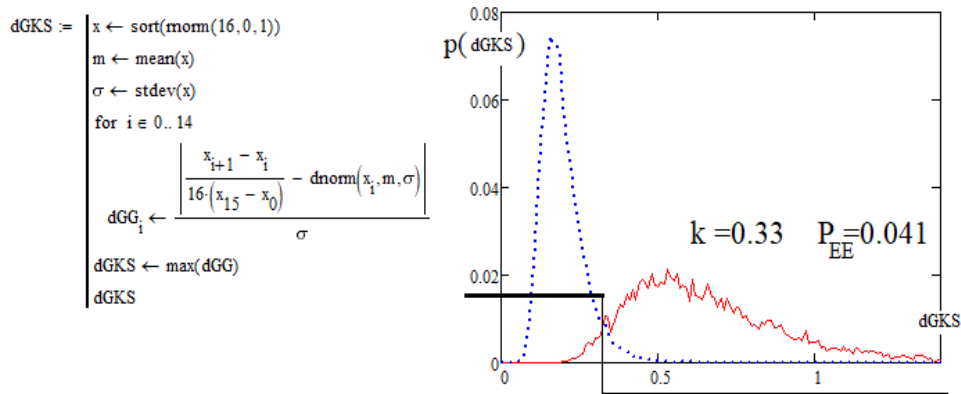


Рис. 2.61. Результаты численного моделирования гибрида дифференциального варианта критерия Гири и критерия Колмогорова – Смирнова

В дополнение к низкому уровню вероятностей ошибок первого и второго рода новый критерий имеет низкий уровень корреляционной сцепленности со всеми классическими статистическими критериями. Все это делает новый критерий перспективным:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{KfM}) = -0.023$	$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{G}) = 0.751$	$\text{corr}(\text{dGKS}, \mu_4) = 0.0005$	$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{R}) = -0.0027$
$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{LS}) = 0.003$	$\text{corr}(\text{dGKS}, \chi^2) = -0.0032$	$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{Rs}) = -0.0032$	$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{S}) = -0.0054$
$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{SKfM}) = 0.333$	$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{AD}) = 0.484$	$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{HU}) = 0.0074$	$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{L}) = -0.0074$
$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{KS}) = -0.017$	$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{Fr}) = 0.5829$	$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{V5}) = 0.01$	$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{W}) = 0.622$
$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{MT}) = -0.011$	$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{mdx}) = -0.008$	$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{LS}) = 0.003$	$\text{corr}(\text{dGKS}, \text{Em}) = -0.0014$

2.4.6.5.3. Гибрид двойного дифференцирования накапливаемых данных перед вычислением критерия Гири с последующим применением критерия Колмогорова – Смирнова

Если мы переходим в пространство двойного дифференцирования входных данных малой выборки, то получаем еще один вариант сильного статистического критерия. Результат численного моделирования отображен на рис. 2.62.

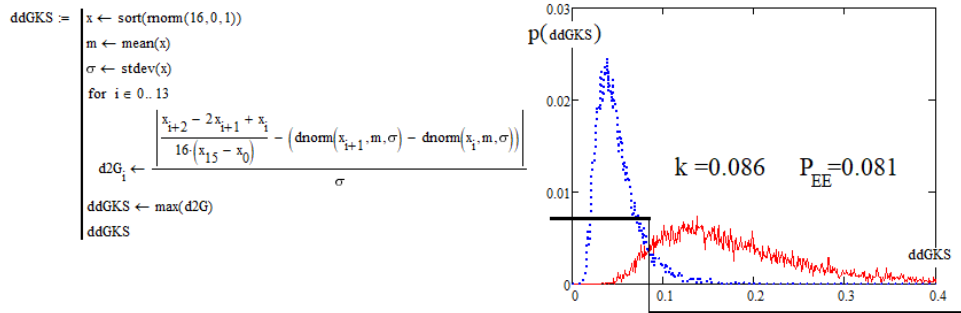


Рис. 2.62. Гибрид модификации критерия Гири двойным дифференцированием данных с критерием Колмогорова – Смирнова

Наибольший уровень корреляционной сцепленности нового критерия возникает в парах с классическими критериями {G, Fr, W} на уровне от 0.6 до 0.69. Для всех иных классических критериев уровень корреляционной сцепленности значительно ниже:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

corr(ddGKS, KfM) = 0.026	corr(ddGKS, G) = 0.688	corr(ddGKS, μ4) = 0.286	corr(ddGKS, R) = 0.222
corr(ddGKS, LS) = -0.168	corr(ddGKS, χ2) = 0.044	corr(ddGKS, Rs) = 0.218	corr(ddGKS, S) = 0.322
corr(ddGKS, SKfM) = 0.412	corr(ddGKS, AD) = 0.515	corr(ddGKS, HU) = -0.1483	corr(ddGKS, L) = 0.234
corr(ddGKS, KS) = 0.106	corr(ddGKS, Fr) = 0.6032	corr(ddGKS, V5) = -0.284	corr(ddGKS, W) = 0.663
corr(ddGKS, MT) = -0.11	corr(ddGKS, mdx) = -0.0052	corr(ddGKS, LS) = -0.168	corr(ddGKS, Em) = 0.216

2.4.7. Статистические критерии, модифицированные предварительным сглаживанием гистограмм распределения входных данных для увеличения объема малой выборки

2.4.7.1. Модификация интерполяцией входных данных хи-квадрат критерия Пирсона

2.4.7.1.1. Модификация интерполяцией входных данных классического хи-квадрат критерия Пирсона

При статистических оценках малых выборок возможно увеличение числа отсчетов с 16 до 31, если мы вычислим средние значения между соседними отсчетами. Реализация этих преобразований отражена на рис. 2.63.

Из данных рис. 2.63 мы видим, что этот тип преобразований позволяет снизить вероятность ошибок хи-квадрат критерия с величины 0.333 до величины 0.303. Удастся добиться выигрыша примерно на 10 % при незначительном усложнении вычислений:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(s\chi^2, \text{KfM}) = 0.5753$	$\text{corr}(s\chi^2, G) = 0.301$	$\text{corr}(s\chi^2, \mu_4) = -0.0864$	$\text{corr}(s\chi^2, R) = 0.0917$
$\text{corr}(s\chi^2, \text{LS}) = -0.00136$	$\text{corr}(s\chi^2, \chi^2) = 0.7209$	$\text{corr}(s\chi^2, R_s) = -0.435$	$\text{corr}(s\chi^2, S) = -0.1282$
$\text{corr}(s\chi^2, \text{SKfM}) = 0.3707$	$\text{corr}(s\chi^2, \text{AD}) = 0.486$	$\text{corr}(s\chi^2, \text{HU}) = -0.72$	$\text{corr}(s\chi^2, L) = -0.3606$
$\text{corr}(s\chi^2, \text{KS}) = 0.4802$	$\text{corr}(s\chi^2, \text{Fr}) = 0.2543$	$\text{corr}(s\chi^2, V_5) = 0.1947$	$\text{corr}(s\chi^2, W) = 0.1309$
$\text{corr}(s\chi^2, \text{MT}) = 0.4626$	$\text{corr}(s\chi^2, \text{mdx}) = -0.108$	$\text{corr}(s\chi^2, \text{KS}) = 0.4802$	$\text{corr}(s\chi^2, \text{Em}) = -0.1599$

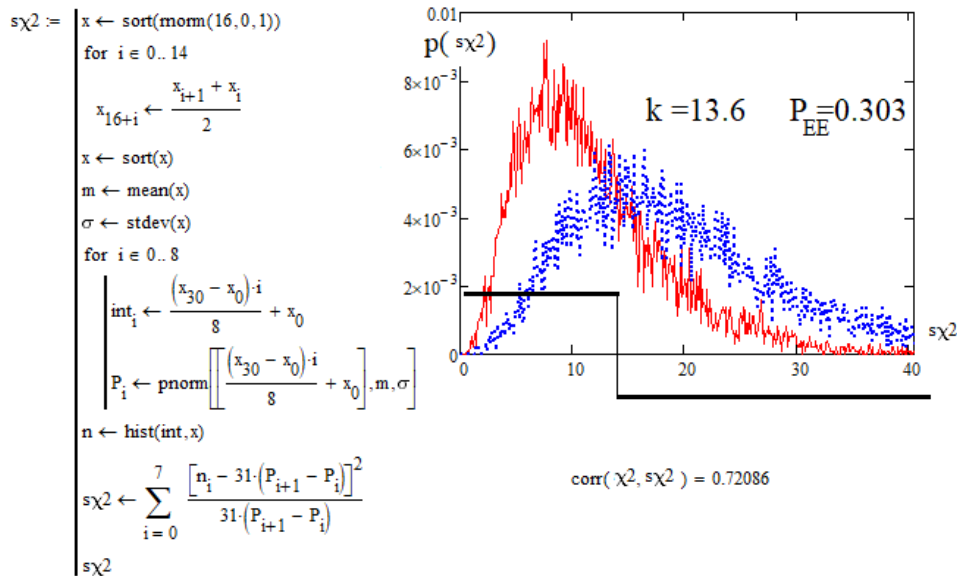


Рис. 2.63. Эффект увеличения числа опытов с 16 до 31 за счет усреднения отсчетов-соседей и перехода от анализа хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы к 7 степеням свободы

2.4.7.1.2. Модификация интерполяцией входных данных хи-квадрат критерия Пирсона за счет его деления на функцию rg_1 с провалом в центре выборки

Следует отметить, что хи-квадрат критерий является самым ранним и, как следствие, на сегодняшний день придумано множество критериев с большей мощностью. Одним из способов повышения мощности хи-квадрат критерия является его деление на взвешивающую функцию с провалом чувствительности в центре малой упорядоченной выборки. Результаты численного эксперимента по тестированию этой модификации критерия Пирсона приведены на рис. 2.64.

Из данных рис. 2.64 видно, что вероятность ошибок исходного критерия Пирсона 0.330 удается снизить до величины 0.231 (на 42 %). Это делает данный технический прием перспективным:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, \text{KfM}) = 0.501$	$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, G) = 0.058$	$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, \mu_4) = 0.086$	$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, R) = 0.137$
$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, \text{LS}) = 0.018$	$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, \chi^2) = 0.923$	$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, R_s) = -0.24$	$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, S) = -0.05$
$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, \text{SKfM}) = 0.25$	$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, \text{AD}) = 0.293$	$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, \text{HU}) = -0.6942$	$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, L) = -0.239$
$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, \text{KS}) = 0.419$	$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, \text{Fr}) = 0.0849$	$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, V_5) = 0.02$	$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, W) = -0.0078$
$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, \text{MT}) = 0.343$	$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, \text{mdx}) = -0.066$	$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, \text{LS}) = 0.018$	$\text{corr}(\chi^2_{\text{pr1}}, \text{Em}) = 0.015$

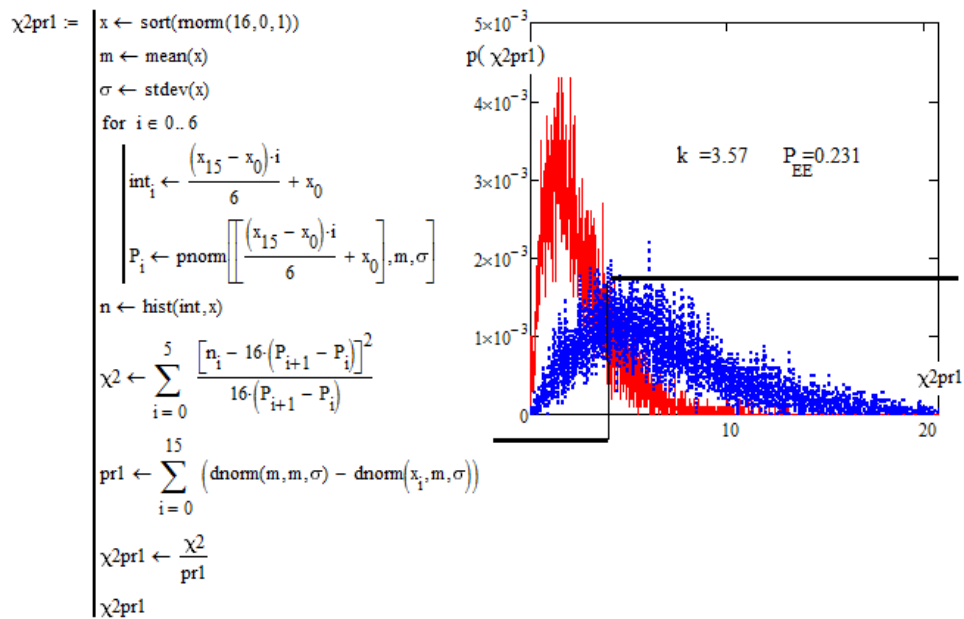


Рис. 2.64. Эффект значительного усиления хи-квадрат критерия Пирсона за счет его деления на функцию провала чувствительности в центре распределения малой выборки

Если теперь увеличить размер анализируемой выборки с 16 до 31 опыта, то мы получим дополнительное снижение вероятностей ошибок первого и второго рода. Соответствующие данные численного моделирования приведены на рис. 2.65.

Сравнивая два последних рисунка, мы видим, что вероятности появления ошибок у модификации с искусственным увеличением выборки с 10 до 31 опыта снизилась с величины 0.231 до величины 0.197 (на 17 %) без существенного усложнения программного обеспечения:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, \text{KfM}) = 0.495$	$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, G) = 0.05$	$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, \mu_4) = 0.086$	$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, R) = 0.248$
$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, \text{LS}) = -0.021$	$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, \chi^2) = 0.622$	$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, R_s) = -0.259$	$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, S) = -0.019$
$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, \text{SKfM}) = 0.249$	$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, \text{AD}) = 0.289$	$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, \text{HU}) = -0.7117$	$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, L) = -0.234$
$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, \text{KS}) = 0.431$	$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, \text{Fr}) = 0.0805$	$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, V_5) = 0.031$	$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, W) = -0.012$
$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, \text{MT}) = 0.343$	$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, \text{mdx}) = -0.081$	$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, \text{LS}) = -0.021$	$\text{corr}(s\chi^2_{pr1}, \text{Em}) = -0.015$

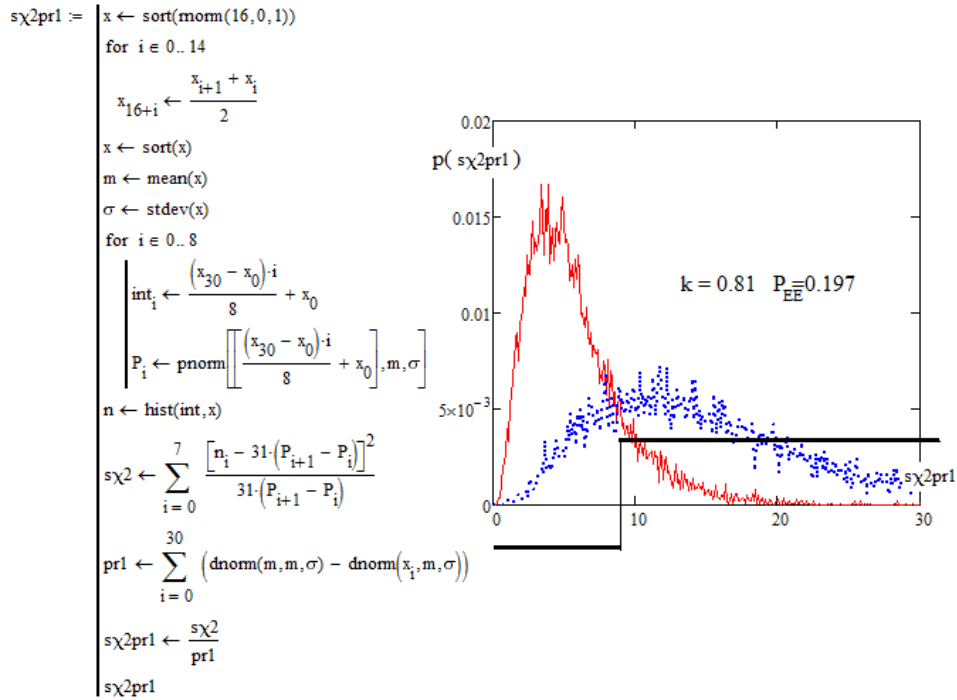


Рис. 2.65. Эффект значительного усиления хи-квадрат критерия Пирсона за счет его деления на функцию провала чувствительности в центре распределения малой выборки и увеличения размеров выборки с 16 до 31 опыта

2.4.7.2. Модификация интерполяцией входных данных критерия Джини

2.4.7.2.1. Модификация интерполяцией входных данных классического критерия Джини

Одним из самых простых в вычислительном отношении является критерий Джини (1941) [3]. К сожалению, он является одним из самых слабых классических статистических критериев при решении задачи разделения малых выборок с нормальным и равномерным распределением данных. На рис. 2.66 представлены результаты имитационного моделирования критерия Джини.

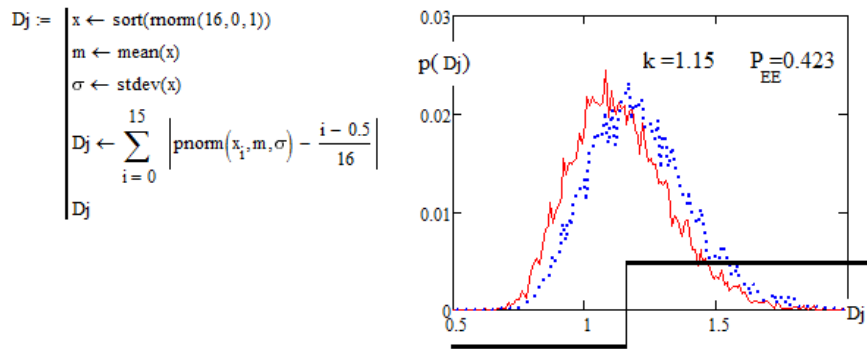


Рис. 2.66. Результаты имитационного моделирования критерия Джини

Еще одним недостатком классического критерия Джини является то, что он имеет высокий показатель среднего модуля коэффициентов корреляции с другими классическими статистическими критериями:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(Dj, \text{KfM}) = 0.675$	$\text{corr}(Dj, G) = 0.641$	$\text{corr}(Dj, \mu_4) = 0.127$	$\text{corr}(Dj, R) = 0.433$
$\text{corr}(Dj, \text{LS}) = -0.564$	$\text{corr}(Dj, \chi^2) = 0.42$	$\text{corr}(Dj, R_s) = -0.066$	$\text{corr}(Dj, S) = 0.521$
$\text{corr}(Dj, \text{SKfM}) = 0.85$	$\text{corr}(Dj, \text{AD}) = 0.797$	$\text{corr}(Dj, \text{HU}) = -0.57$	$\text{corr}(Dj, L) = 0.318$
$\text{corr}(Dj, \text{KS}) = 0.746$	$\text{corr}(Dj, \text{Fr}) = 0.759$	$\text{corr}(Dj, V_5) = -0.146$	$\text{corr}(Dj, W) = 0.483$
$\text{corr}(Dj, \text{MT}) = 0.336$	$\text{corr}(Dj, \text{mdx}) = -0.428$	$\text{corr}(Dj, \text{LS}) = -0.564$	$\text{corr}(Dj, \text{Em}) = 0.095$

Если выполнить процедуру интерполяции промежуточных данных, позволяющую получить из выборки в 16 опытов выборку в 31 опыт, то критерий Джини дает некоторое снижение вероятностей появления ошибок первого и второго рода. На рис. 2.67 приводится программа соответствующего численного эксперимента и его результаты.

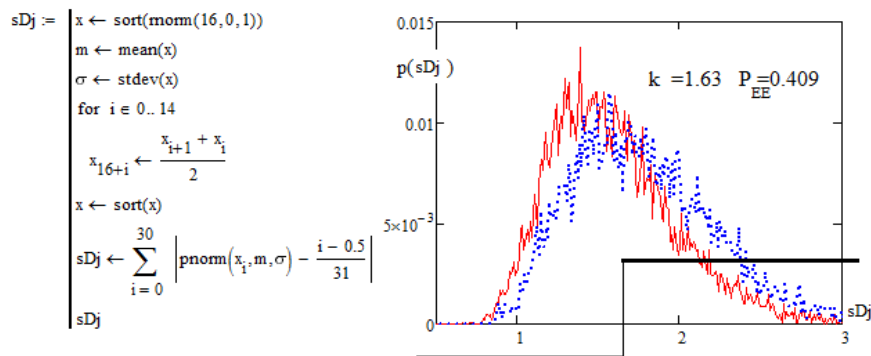


Рис. 2.67. Незначительное улучшение вероятностных характеристик классического критерия Джини при искусственном увеличении размеров выборки с 16 до 31 опыта линейной интерполяцией

К сожалению, этот критерий дает высокий уровень вероятности ошибок первого и второго рода, что делает его малоперспективным:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(sDj, KfM) = 0.793$	$\text{corr}(sDj, G) = 0.548$	$\text{corr}(sDj, \mu_4) = 0.073$	$\text{corr}(sDj, R) = 0.243$
$\text{corr}(sDj, LS) = -0.255$	$\text{corr}(sDj, \chi^2) = 0.596$	$\text{corr}(sDj, Rs) = -0.188$	$\text{corr}(sDj, S) = 0.221$
$\text{corr}(sDj, SKfM) = 0.724$	$\text{corr}(sDj, AD) = 0.766$	$\text{corr}(sDj, HU) = -0.7595$	$\text{corr}(sDj, L) = 0.0166$
$\text{corr}(sDj, KS) = 0.714$	$\text{corr}(sDj, Fr) = 0.5877$	$\text{corr}(sDj, V5) = -0.104$	$\text{corr}(sDj, W) = 0.32$
$\text{corr}(sDj, MT) = 0.434$	$\text{corr}(sDj, mdx) = -0.246$	$\text{corr}(sDj, LS) = -0.255$	$\text{corr}(sDj, Em) = 0.039$

2.4.7.2.2. Модификация интерполяцией входных данных дифференциального варианта критерия Джини

В сравнении с размножением данных линейным сглаживанием гораздо более эффективным является переход от классического интегрального критерия Джини к его дифференциальному аналогу [51, 52]. На рис. 2.68 представлены преобразования, позволяющие численно проверить последнее утверждение.

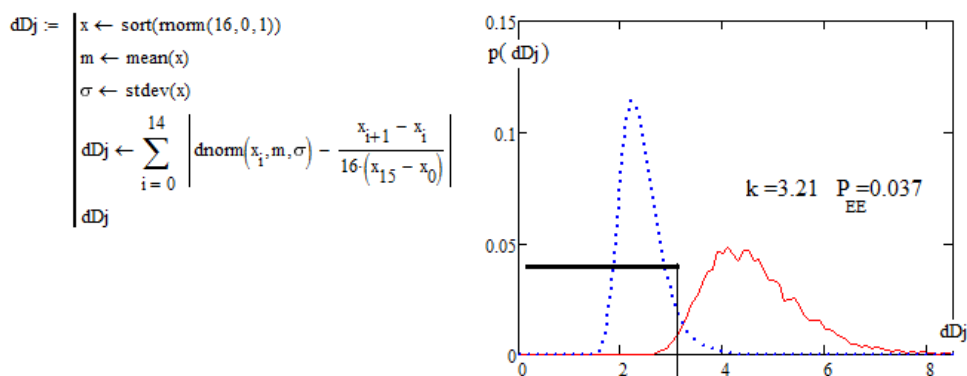


Рис. 2.68. Значительное повышение эффективности разделения малых выборок при переходе к дифференциальному варианту критерия Джини

Из данных рис. 2.68 следует, что происходит снижение вероятности появления ошибок более чем в 10 раз с величины 0.423 до величины 0.037. Это является еще одним свидетельством необходимости параллельного просмотра и сравнения нескольких типов интегральных и дифференциальных статистических критериев, имеющих похожие программные реализации.

Еще одним преимуществом нового статистического критерия является низкий уровень корреляционной сцепленности с классическими статистическими критериями:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями дифференциального варианта критерия Джини

$\text{corr}(\text{dDj}, \text{KfM}) = -0.0412$	$\text{corr}(\text{dDj}, \text{G}) = 0.731$	$\text{corr}(\text{dDj}, \mu_4) = 0.209$	$\text{corr}(\text{dDj}, \text{R}) = 0.084$
$\text{corr}(\text{dDj}, \text{LS}) = 0.0379$	$\text{corr}(\text{dDj}, \chi^2) = -0.0489$	$\text{corr}(\text{dDj}, \text{Rs}) = 0.2027$	$\text{corr}(\text{dDj}, \text{S}) = 0.0692$
$\text{corr}(\text{dDj}, \text{SKfM}) = 0.344$	$\text{corr}(\text{dDj}, \text{AD}) = 0.47$	$\text{corr}(\text{dDj}, \text{HU}) = -0.0262$	$\text{corr}(\text{dDj}, \text{L}) = 0.0887$
$\text{corr}(\text{dDj}, \text{KS}) = -0.026812$	$\text{corr}(\text{dDj}, \text{Fr}) = 0.5915$	$\text{corr}(\text{dDj}, \text{V5}) = -0.21$	$\text{corr}(\text{dDj}, \text{W}) = 0.604$
$\text{corr}(\text{dDj}, \text{MT}) = -0.148$	$\text{corr}(\text{dDj}, \text{mdx}) = 0.059$	$\text{corr}(\text{dDj}, \text{LS}) = 0.0379$	$\text{corr}(\text{dDj}, \text{Em}) = 0.184$

Если предварительно выполнить линейное размножение исходных данных, увеличив объем выборки с 16 опытов до 31 опыта, то качество принимаемых решений продолжает расти (рис. 2.69).

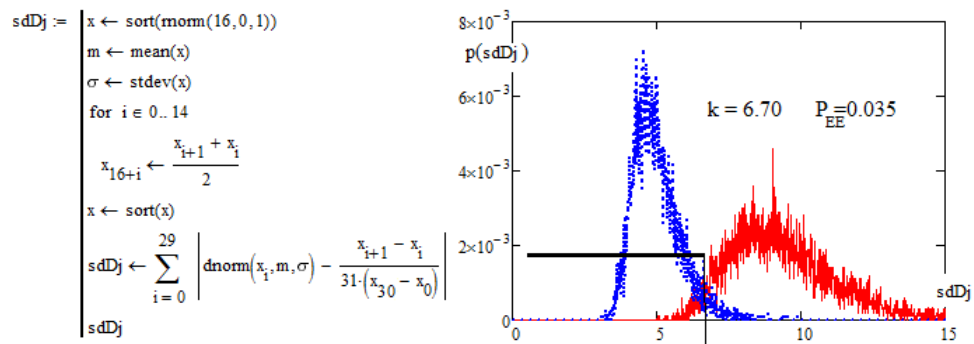


Рис. 2.69. Сохранение роста качества принимаемых решений из-за искусственного роста объема выборки при переходе от классических критериев Джини к их дифференциальным аналогам

Сглаживание входных данных, приводящее к росту размера анализируемой выборки, хорошо работает в сочетании с использованием дифференцирования входных данных. Этот эффект обнаружен в 2014 г. [51, 52], однако на тот момент отсутствовало понимание, какой из технических приемов более эффективен. Отсутствовало это понимание и в более поздних публикациях 2015 г. [53, 54]:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{KfM}) = -0.0493$	$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{G}) = 0.733$	$\text{corr}(\text{sdDj}, \mu_4) = 0.243$	$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{R}) = 0.102$
$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{LS}) = 0.0318$	$\text{corr}(\text{sdDj}, \chi^2) = -0.046$	$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{Rs}) = 0.2234$	$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{S}) = 0.0895$
$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{SKfM}) = 0.35$	$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{AD}) = 0.475$	$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{HU}) = -0.0399$	$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{L}) = 0.1014$
$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{KS}) = -0.019581$	$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{Fr}) = 0.5996$	$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{V5}) = -0.239$	$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{W}) = 0.637$
$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{MT}) = -0.156$	$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{mdx}) = 0.059$	$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{LS}) = 0.03175$	$\text{corr}(\text{sdDj}, \text{Em}) = 0.214$

2.4.7.2.3. Модификация интерполяцией входных данных критерия Джини с ослаблением влияния центра выборки

В целом критерий Джини похож по своим свойствам на классические статистические критерии, созданные в первой половине XX в., т.е. к нему можно применять линейку известных математических приемов регуляризации процедур вычисления. В частности, возможно подчеркивание тяжелых «хвостов» равномерного распределения данных. Для этого достаточно при вычислениях подавлять центральную часть малой выборки. Результаты численного моделирования этой модификации критерия приведены на рис. 2.70.

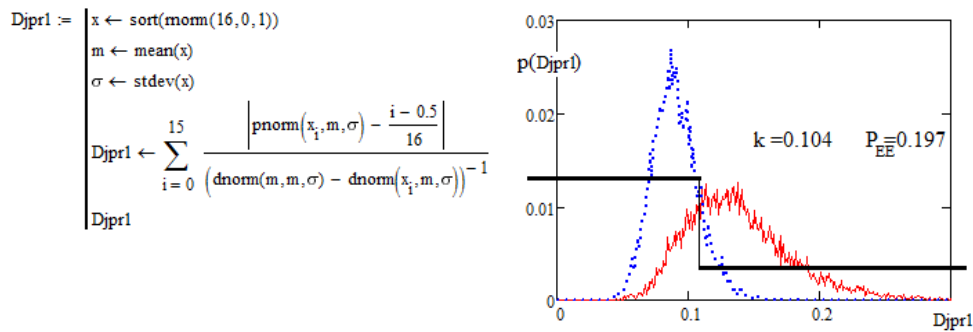


Рис. 2.70. Классический критерий Джини, модифицированный весовой функцией подавления данных, находящихся в центре малой выборки

Если классический критерий Джини имеет очень высокий уровень вероятности появления ошибок 0.423, то его модификация дает снижение этого уровня до 0.197 (более чем в два раза). Последнее является положительным моментом, т.е. подобная модификация вычислений является перспективной:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{KfM}) = 0.2196$	$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{G}) = 0.395$	$\text{corr}(\text{Djpr1}, \mu_4) = -0.32$	$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{R}) = -0.24$
$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{LS}) = 0.1627$	$\text{corr}(\text{Djpr1}, \chi^2) = 0.1772$	$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{Rs}) = -0.3476$	$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{S}) = -0.3293$
$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{SKfM}) = -0.108$	$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{AD}) = 0.184$	$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{HU}) = -0.0829$	$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{L}) = -0.3402$
$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{KS}) = -0.197132$	$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{Fr}) = 0.0913$	$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{V5}) = 0.323$	$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{W}) = 0.079$
$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{MT}) = 0.295$	$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{mdx}) = 0.176$	$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{LS}) = 0.16272$	$\text{corr}(\text{Djpr1}, \text{Em}) = -0.3$

К сожалению, предварительная экстраполяция входных данных существенно ухудшает результат нейросетевого разделения малых выборок нормально распределенных и равномерно распределенных данных. Результаты, подтверждающие этот эффект, приведены на рис. 2.71.

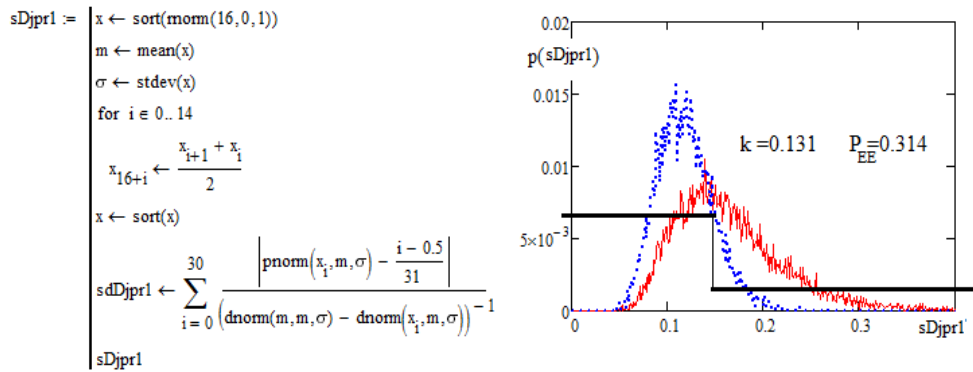


Рис. 2.71. Эффект ухудшения показателей критерия Джини, модифицированного подавлением данных в центре малой выборки

Получается, что первоначальный достаточно высокий уровень вероятности появления ошибок 0.197 ухудшается до величины 0.314. Это делает бесперспективным увеличение выборки линейной интерполяцией входных данных:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(sDjpr1, KfM) = 0.0262$	$\text{corr}(sDjpr1, G) = 0.598$	$\text{corr}(sDjpr1, \mu4) = -0.271$	$\text{corr}(sDjpr1, R) = -0.155$
$\text{corr}(sDjpr1, LS) = 0.1252$	$\text{corr}(sDjpr1, \chi2) = 0.0555$	$\text{corr}(sDjpr1, Rs) = -0.2377$	$\text{corr}(sDjpr1, S) = -0.2388$
$\text{corr}(sDjpr1, SKfM) = 0.108$	$\text{corr}(sDjpr1, AD) = 0.319$	$\text{corr}(sDjpr1, HU) = 0.0578$	$\text{corr}(sDjpr1, L) = -0.2379$
$\text{corr}(sDjpr1, KS) = -0.1371$	$\text{corr}(sDjpr1, Fr) = 0.352$	$\text{corr}(sDjpr1, V5) = 0.263$	$\text{corr}(sDjpr1, W) = 0.331$
$\text{corr}(sDjpr1, MT) = 0.13$	$\text{corr}(sDjpr1, mdx) = 0.063$	$\text{corr}(sDjpr1, KS) = -0.137$	$\text{corr}(sDjpr1, Em) = -0.227$

2.4.7.3. Модификация интерполяцией входных данных классического критерия Али – Черго – Ревиса

2.4.7.3.1. Модификация интерполяцией входных данных классического критерия Али – Черго – Ревиса

Классический критерий Али – Черго – Ревиса обеспечивает вероятность появления ошибок первого и второго рода на уровне 0.101. Если мы выполняем размножение входных данных линейной интерполяцией, то вероятность появления ошибок первого и второго рода снижается примерно на 20 % (рис. 2.72).

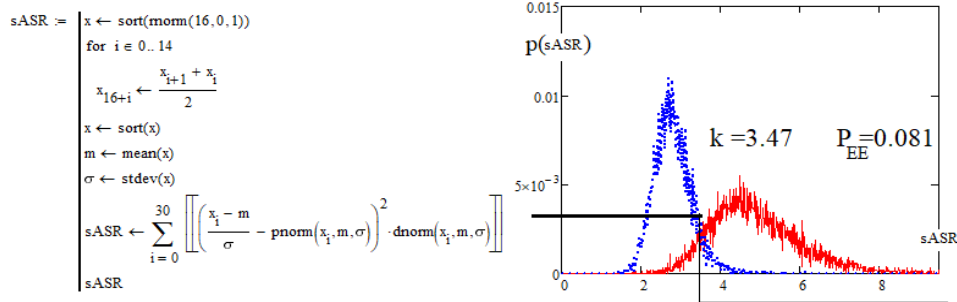


Рис. 2.72. Эффект снижения вероятности появления ошибок критерия Али – Черго – Ревиса при размножении входных данных линейной интерполяцией

В связи с тем, что усложнение программной реализации незначительное, этот технический прием регуляризации вычислений является перспективным:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(sASR, KfM) = -0.0129$	$\text{corr}(sASR, G) = 0.428$	$\text{corr}(sASR, \mu_4) = -0.11$	$\text{corr}(sASR, R) = -0.215$
$\text{corr}(sASR, LS) = 0.3043$	$\text{corr}(sASR, \chi^2) = 0.0085$	$\text{corr}(sASR, Rs) = -0.0969$	$\text{corr}(sASR, S) = -0.3352$
$\text{corr}(sASR, SKfM) = -0.097$	$\text{corr}(sASR, AD) = 0.145$	$\text{corr}(sASR, HU) = 0.0265$	$\text{corr}(sASR, L) = -0.2795$
$\text{corr}(sASR, KS) = -0.2908$	$\text{corr}(sASR, Fr) = 0.1576$	$\text{corr}(sASR, V5) = 0.116$	$\text{corr}(sASR, W) = 0.209$
$\text{corr}(sASR, MT) = 0.037$	$\text{corr}(sASR, mdx) = 0.256$	$\text{corr}(sASR, KS) = -0.291$	$\text{corr}(sASR, Em) = -0.09$

2.4.7.3.2. Модификация интерполяцией входных данных дифференциального аналога критерия Али – Черго – Ревиса

Для дифференциального варианта критерия Али – Черго – Ревиса вероятность появления ошибок составляет величину 0.114. Применение размножения входных данных линейной интерполяцией для этого критерия позволяет снизить вероятность появления ошибок более чем в два раза. Результаты численного моделирования приведены на рис. 2.73.

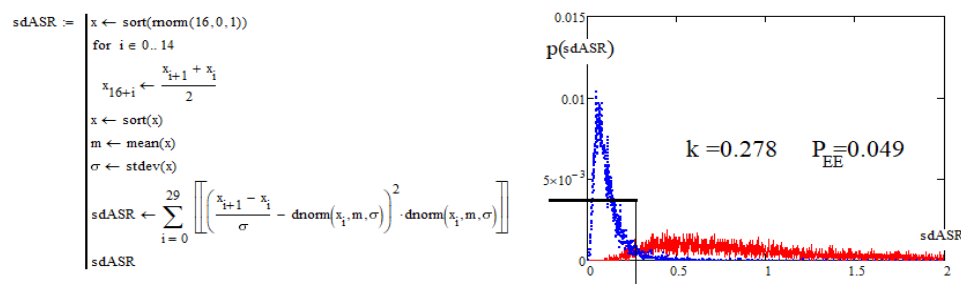


Рис. 2.73. Более чем двукратное снижение вероятностей ошибок при размножении входных данных для дифференциального варианта критерия Али – Черго – Ревиса

В связи с тем, что усложнение программной реализации незначительное, этот технический прием регуляризации вычислений является перспективным. Дополнительным преимуществом является то, что новый критерий обеспечивает низкий уровень корреляционной сцепленности:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{KfM}) = -0.0485$	$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{G}) = 0.688$	$\text{corr}(\text{sdASR}, \mu_4) = 0.267$	$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{R}) = 0.117$
$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{LS}) = -0.006$	$\text{corr}(\text{sdASR}, \chi^2) = -0.0434$	$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{Rs}) = 0.2501$	$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{S}) = 0.1373$
$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{SKfM}) = 0.368$	$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{AD}) = 0.464$	$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{HU}) = -0.045$	$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{L}) = 0.1517$
$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{KS}) = 0.0181$	$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{Fr}) = 0.585$	$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{V5}) = -0.271$	$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{W}) = 0.708$
$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{MT}) = -0.167$	$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{mdx}) = 0.062$	$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{KS}) = 0.018$	$\text{corr}(\text{sdASR}, \text{Em}) = 0.221$

2.4.7.4. Модификация интерполяцией входных данных критерия Гири

2.4.7.4.1. Модификация интерполяцией входных данных классического критерия Гири

Классический критерий Гири имеет вероятность появления ошибок на уровне 0.119. Если увеличить объем выборки линейной интерполяцией, то вероятность появления ошибок увеличивается. Эффект роста вероятности появления ошибок иллюстрируется рис. 2.74.

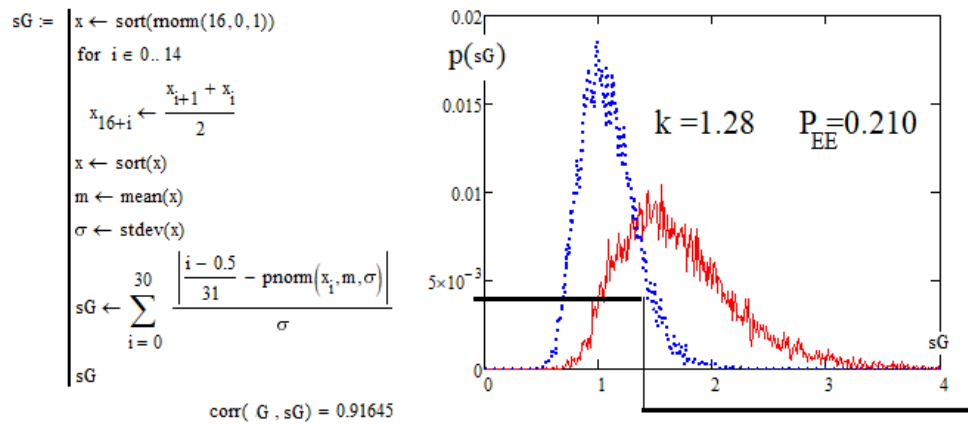


Рис. 2.74. Эффект двукратного роста вероятности ошибок классического критерия Гири при условии увеличения входной выборки линейной интерполяцией

В связи с эффектом роста вероятности ошибок использовать процедуру увеличения объема выборки входных данных линейной интерполяцией нецелесообразно:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(sG, \text{KfM}) = 0.6003$	$\text{corr}(sG, G) = 0.923$	$\text{corr}(sG, \mu_4) = 0.0698$	$\text{corr}(sG, R) = 0.1863$
$\text{corr}(sG, \text{LS}) = -0.18591$	$\text{corr}(sG, \chi^2) = 0.4364$	$\text{corr}(sG, R_s) = -0.1072$	$\text{corr}(sG, S) = 0.1737$
$\text{corr}(sG, \text{SKfM}) = 0.8001$	$\text{corr}(sG, \text{AD}) = 0.9227$	$\text{corr}(sG, \text{HU}) = -0.5743$	$\text{corr}(sG, L) = 0.028$
$\text{corr}(sG, \text{KS}) = 0.5417$	$\text{corr}(sG, \text{Fr}) = 0.8534$	$\text{corr}(sG, V5) = -0.1124$	$\text{corr}(sG, W) = 0.6605$
$\text{corr}(sG, \text{MT}) = 0.3037$	$\text{corr}(sG, \text{mdx}) = -0.1484$	$\text{corr}(sG, \text{KS}) = 0.5417$	$\text{corr}(sG, \text{Em}) = 0.0501$

2.4.7.4.2. Модификация интерполяцией входных данных дифференциального варианта критерия Гири

Дифференциальный вариант критерия Гири позволяет добиться вероятности появления ошибок на уровне 0.038. Если же мы выполним процедуру предварительного размножения данных с 16 до 31 опыта, то удастся снизить вероятность появления ошибок примерно на 6 %. На рис. 2.75 приведены результаты численного моделирования, подтверждающие полученный положительный эффект.

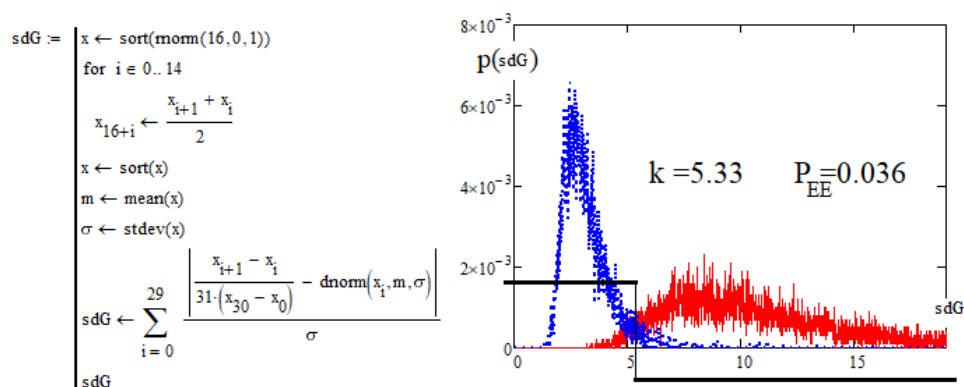


Рис. 2.75. Эффект снижения вероятности появления ошибок для дифференциального варианта критерия Гири при искусственном увеличении выборки обрабатываемых данных с 16 до 31 опыта линейной интерполяцией

Так как для достижения положительного эффекта программная реализация нового критерия усложняется незначительно, этот подход к регуляризации вычисления является перспективным:

Корреляционная сцепленность с классическими критериями

$\text{corr}(sdG, \text{KfM}) = -0.0108$	$\text{corr}(sdG, G) = 0.04$	$\text{corr}(sdG, \mu_4) = -0.0017$	$\text{corr}(sdG, R) = 0.0072$
$\text{corr}(sdG, \text{LS}) = -0.02606$	$\text{corr}(sdG, \chi^2) = -0.0161$	$\text{corr}(sdG, R_s) = 0.0236$	$\text{corr}(sdG, S) = 0.0335$
$\text{corr}(sdG, \text{SKfM}) = 0.0274$	$\text{corr}(sdG, \text{AD}) = 0.027$	$\text{corr}(sdG, \text{HU}) = 0.0275$	$\text{corr}(sdG, L) = 0.0422$
$\text{corr}(sdG, \text{KS}) = 0.0164$	$\text{corr}(sdG, \text{Fr}) = 0.0381$	$\text{corr}(sdG, V5) = -0.0141$	$\text{corr}(sdG, W) = 0.0312$
$\text{corr}(sdG, \text{MT}) = -0.019$	$\text{corr}(sdG, \text{mdx}) = -0.0097$	$\text{corr}(sdG, \text{KS}) = 0.0164$	$\text{corr}(sdG, \text{Em}) = -0.0057$

Заключение по главе 2

Исследователи прошлого века при синтезе классических статистических критериев старались повысить мощность критериев, при этом вероятности ошибок 20 исследованных классических критериев находятся в пределах от 0.101 до 0.404. Среднее геометрическое исследованных в данной работе классических критериев составляет 0.284 для малых выборок в 16 опытов.

Рассмотренные в данном справочнике 49 новых статистических критериев имеют вероятности ошибок от 0.035 до 0.369. Среднее геометрическое исследованных в данной работе новых критериев составляет 0.107. Мы наблюдаем значительное повышение достоверности принимаемых решений при использовании новых критериев. При переходе от классических критериев к новым критериям доверительная вероятность к принятым решениям в среднем должна вырасти от 0.716 до величины 0.893. В этом плане виден ощутимый прогресс.

Следует отметить, что в данной версии справочника отражены далеко не все возможные варианты сборки новых статистических критериев. Очевидным пробелом, в частности, является отсутствие критериев, построенных на основе применения частично ортогональных полиномов Чебышева первого и второго рода [50].

ПЕРСПЕКТИВА ПЕРЕХОДА ОТ ОБЫЧНЫХ БИНАРНЫХ НЕЙРОНОВ К БОЛЕЕ ЭФФЕКТИВНЫМ И БОЛЕЕ СЛОЖНЫМ ИСКУССТВЕННЫМ НЕЙРОНАМ С МНОГОУРОВНЕВЫМИ ВЫХОДНЫМИ КВАНТОВАТЕЛЯМИ

3.1. Численная оценка корреляционных связей группы из пяти статистических критериев

Рассмотрим нейросетевое объединение пяти статистических критериев $\{Fr, dFr, ASR, G, dpr5\}$, каждый из которых имеет следующие равные вероятности ошибок первого и второго рода для бинарных нейронов $\{0.174, 0.035, 0.101, 0.119, 0.074\}$. Если бы эти искусственные нейроны давали независимые отклики, то вероятности ошибок мы имели бы право перемножать. При этом мы получили бы крайне оптимистическую оценку (далекую от данных, наблюдаемых на практике). В связи с этой ситуацией оценим корреляционные связи. Результаты численного моделирования корреляционных связей рассматриваемых критериев отображены на рис. 3.1.

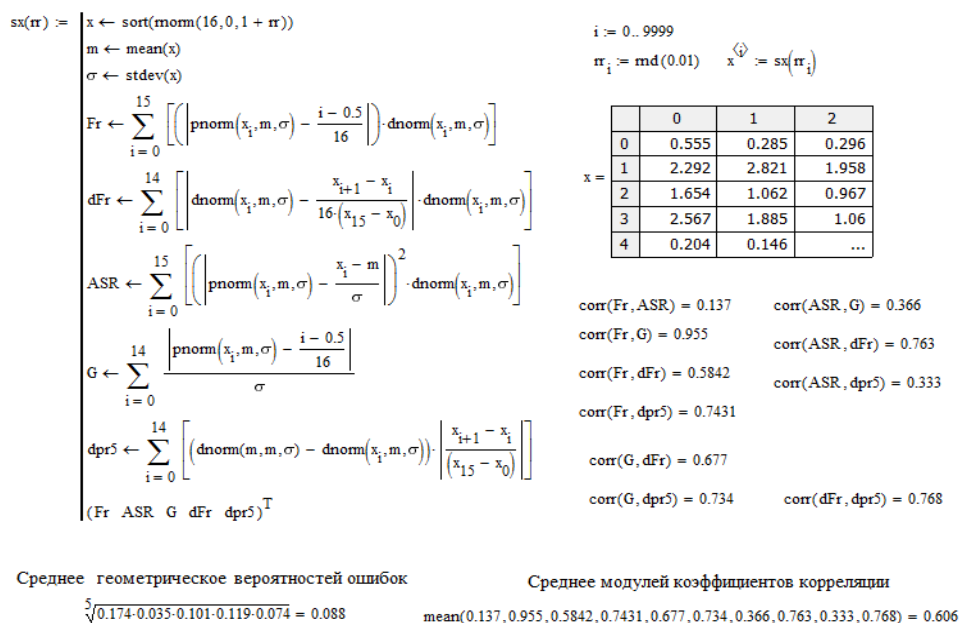


Рис. 3.1. Результаты численного эксперимента по оценке корреляционных связей между пятью исследуемыми статистическими критериями

Из рис. 3.1 мы видим, что данные откликов статистических критериев сильно коррелированы. В первом приближении их можно учесть, заменив реальную корреляционную матрицу на ее симметризованный аналог, имеющий вне диагонали одинаковые коэффициенты корреляции – 0.606.

Столь высокая корреляционная сцепленность не позволяет нам устранять все ошибки при свертывании пятикратной кодовой избыточности. Если бы сильные корреляционные связи полностью отсутствовали, то остаточная вероятность ошибок оказалась бы пренебрежимо малой $0.088^5 = 0.0000053$. К сожалению, из-за сильных корреляционных связей результат оказывается примерно в 10 000 раз хуже.

3.2. Корректировка кодов с пятикратной избыточностью сети простейших бинарных искусственных нейронов

Для оценки реальных возможностей корректировки ошибок простейших бинарных нейронов необходимо выполнить численный эксперимент. Программное обеспечение для проведения численного эксперимента и его результаты приведены на рис. 3.2.

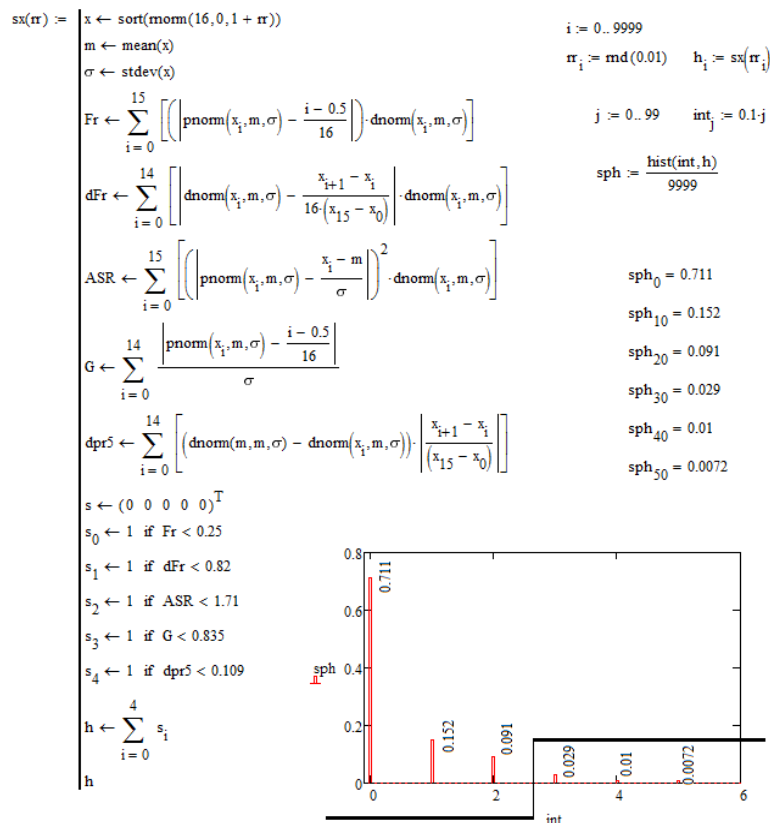


Рис. 3.2. Численный эксперимент свертывания кодов с пятикратной избыточностью при сильно коррелированных между собой разрядах

Из рис. 3.2 следует, что свертывание пятикратной избыточности позволяет снизить значение среднегеометрической вероятности ошибок с 0.088 до 0.0372. Рассматриваемая нейрокодовая конструкция способна снижать вероятности ошибок примерно в 2 раза при сильно зависимых разрядах. Это выполнимо, если бы все нейроны давали бы примерно одинаковые вероятности ошибок первого и второго рода 0.088. В нашем конкретном случае мы имеем значительный разброс вероятностей ошибок от 0.035 у нейрона дифференциального аналога критерия Фроцини до 0.174 у нейрона, являющегося аналогом классического критерия Фроцини, т.е. всю эту математическую конструкцию можно считать практически бесполезной. Ее можно заменить одним самым сильным из рассматриваемых нейронов – dFr. Это является следствием сильной коррелированности объединяемых критериев и низкой корректирующей способностью простейших бинарных искусственных нейронов. Кажется, что существует только три возможных варианта выхода из создавшегося тупика.

Первый вариант состоит в попытках синтезировать очень большое число новых статистических критериев, которые за счет очень большой кодовой избыточности все-таки дадут возможность получать решения с требуемой достоверностью на малых выборках. В этом направлении работ существуют определенные успехи. Если в прошлом веке усилиями физико-математической общественности удалось создать примерно 40 классических статистических критериев для проверки гипотезы нормальности и/или равномерности законов распределения малых выборок, то в начале этого XXI в. в период с 2014 г. [31] по настоящее время удалось синтезировать как минимум 46 новых статистических критериев. За примерно 10 лет в начале XXI в. синтезировано больше новых статистических критериев, чем за прошлый век. Именно осознание этого факта и послужило основным толчком для написания данного справочника. Плохо, когда следующее поколение исследователей медленно, ощупью будет искать и повторять уже кем-то достигнутые результаты.

Еще одним перспективным направлением работ являются осознанные попытки использования «точечной» (под конкретный объем выборки) ортогонализации почти ортогональных классических полиномов [42] 2022 г. При проведении работ в этом направлении, видимо, будет эффективным применение хорошо известной процедуры ортогонализации Грамма – Шмидта.

Третьим, последним направлением работ является переход от использования простейших бинарных нейронов к использованию более сложных искусственных нейронов с многоуровневыми квантователями [55] 2013 г. Как ни странно, это третье направление исследований [56] является самым простым по его технической реализации. Для его реализации вполне достаточно в уже синтезированных (или

в уже ранее обученные искусственные нейроны) ввести новый более сложный квантователь с дополнительными порогами сравнения.

3.3. Предсказание желаемой избыточности бинарных нейрокодовых конструкций с обнаружением и исправлением ошибок

Уменьшение вероятности ошибок с 0.088 до 0.037 при переходе к использованию пяти симметричных нейронов было показано в предыдущем параграфе для сильной коррелированности выходных состояний, используемых критериев. Исходя из этого, мы можем предсказать требуемую избыточность числа используемых критериев для достижения желаемой доверительной вероятности. Простейшее предсказание линейной экстраполяцией отображено на рис. 3.3.

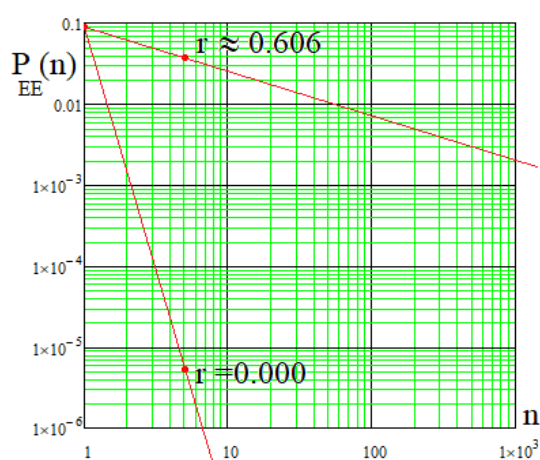


Рис. 3.3. Предсказание необходимого числа бинарных искусственных нейронов для пяти сильно коррелированных и пяти слабо коррелированных критериев

Из рисунка видно, что для достижения доверительной вероятности 0.993 придется использовать несколько тысяч искусственных нейронов с уровнем взаимной коррелированности $r \approx 0.606$. Если бы корреляционные связи отсутствовали, то уже при использовании трех искусственных нейронов мы получили бы уровень доверительной вероятности 0.9999. Это свидетельствует о необходимости надежного учета влияния корреляционных связей при моделировании искусственных нейронов.

3.4. Симметризация задачи учета корреляционных связей при моделировании искусственных нейронов

Формально при численном моделировании мы имеем возможность использовать генератор псевдослучайных чисел с нормальным

законом распределения значений. Очевидно, что данные от псевдослучайного программного генератора можно сделать коррелированными, предварительно задавшись требуемой корреляционной матрицей [57]. Однако подобные преобразования достаточно трудоемки.

Упростим задачу моделирования, заменив произвольную корреляционную матрицу на ее симметризованный аналог [41, 46] с одинаковыми коэффициентами корреляции вне диагонали. В этом случае связывающая независимые данные матрица является симметричной и имеет одинаковые элементы вне диагонали:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ a & 1 & a & \dots & a \\ a & a & 1 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & r & r & \dots & r \\ r & 1 & r & \dots & r \\ r & r & 1 & \dots & r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r & r & r & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Также следует отметить очевидное снижение размерности решаемой задачи моделирования. Одному значению коэффициентов корреляции симметризованной матрицы всегда соответствует единственное значение симметричной связывающей матрицы.

На рис. 3.4 приведена программная реализация численного эксперимента по связыванию пяти псевдослучайных независимых параметров через их умножение на связывающую корреляционную матрицу с элементами $a = 0.181$ вне диагонали. При такой матрице корреляционная связанность данных составляет 0.606.

```

y(s) :=
  x ← mom(5,0,1+s)
  a ← 0.181
  for i ∈ 0..4
    y_i ← [ ∑_{j=0}^4 (x_j·a) ] + (1-a)·x_i
  y ← y / stdev(y)
  s ← (0 0 0 0 0)ᵀ
  k ← 0
  for i ∈ 0..4
    s_i ← 1 if y_i > k
  y
  i := 0..9999
  s_i := md(0.01)
  x^(i) := y(s_i)
  a0_i := (x^(i))_0
  a1_i := (x^(i))_1
  corr(a0, a1) = 0.602

```

	0	1	2	3	4
0	-1.108	-1.928	2.183	-3.684	-2.252
1	1.158	3.996·10 ⁻³	1.155	-0.657	-0.751
2	1.63	-2.294	0.03	-1.765	-2.91
3	0.841	-0.304	-0.283	-2.621	-0.558
4	-0.277	9.717·10 ⁻³	1.995	-1.924	...

Рис. 3.4. Численный эксперимент по связыванию независимых псевдослучайных данных

3.5. Подбор порога квантования пяти симметричных искусственных нейронов

В случае, если данные численного эксперимента дают заданное значение корреляционной сцепленности, мы можем выполнить их квантование, сравнивая с порогом $k = 0.00$, как это показано на рис. 3.4. Тогда вероятности появления состояний «0» и «1» в выходном потоке будут равновероятны. Для нас же нужна ситуация, когда состояние «0» преобладает над состоянием «1». Вероятность появления состояний «1» должна составлять 0.088 для каждого из пяти искусственных нейронов. Эта ситуация возникает, если в программе изменить порог квантования до значения $k = 2.25$, то мы достигнем значения $P(\langle 1 \rangle) = 0.088$, как это отображено на рис. 3.5.

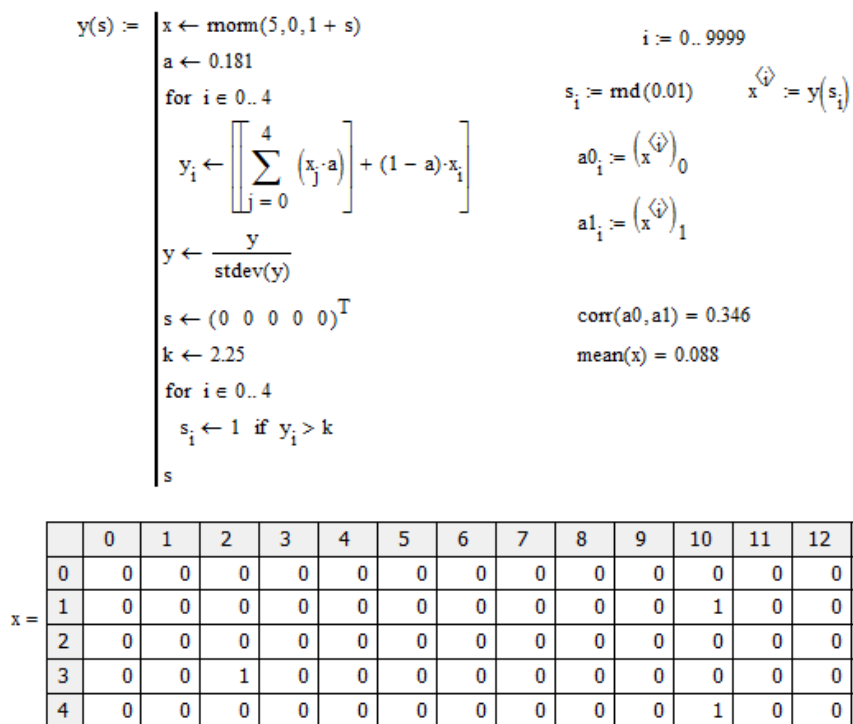


Рис. 3.5. Подбор порога квантования для пяти симметричных нейронов

3.6. Оценка снижения вероятности ошибок при устранении пятикратной кодовой избыточности

В силу того, что мы умеем моделировать симметричные корреляционные связи и функцию квантования данных на выходах

пяти симметричных искусственных нейронов, мы можем оценить вероятности ошибок первого и второго рода, возникающую после свертывания 5-кратной избыточности выходного кода нейросети. Программное обеспечение для реализации этого численного эксперимента и его результаты приведены на рис. 3.6.

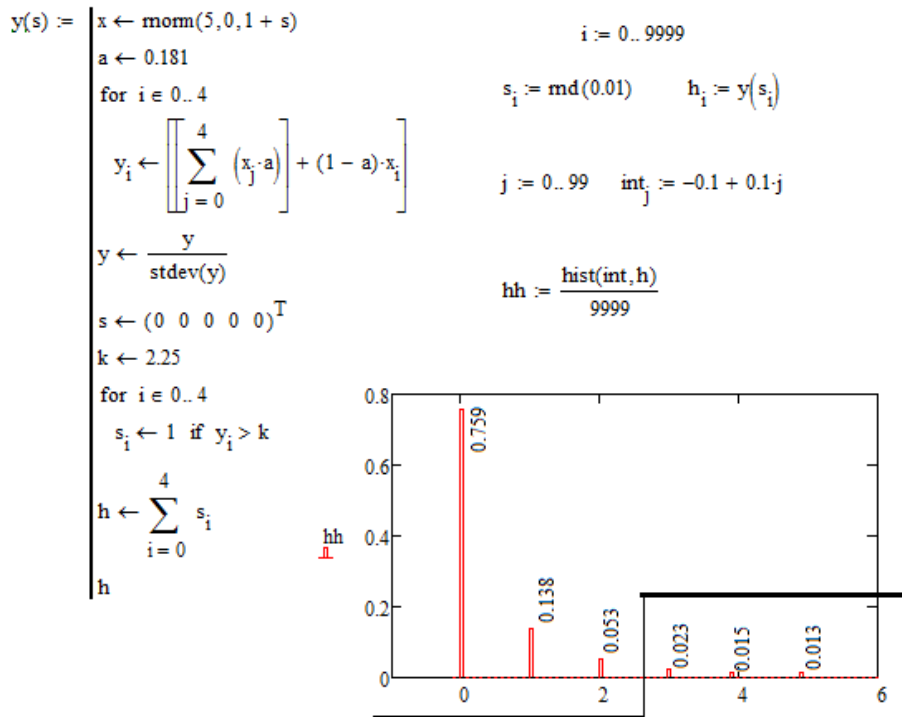


Рис. 3.6. Оценка уровня снижения вероятности ошибок первого и второго рода в пространстве спектральных линий Хэмминга после свертывания избыточности для пяти симметричных нейронов

Из рис. 3.6 видно, что после свертывания кодовой избыточности вероятность ошибок первого и второго рода должна составить величину близкую к 0.051. Это в 0.378 раза больше, чем результаты предыдущего численного эксперимента (см. рис. 3.2). Последнее означает, что проведенная ранее оценка коэффициента равной коррелированности завышена. Необходимо уменьшить значение оценки с 0.606 до 0.59 и повторить вычисления. Этот процесс быстро сходится, через несколько итераций мы получим достаточно точную оценку показателя корреляционной сцепленности данных, который будет приводить вероятности ошибок 0.088 каждого из пяти симметричных нейронов к их результирующей вероятности ошибок 0.037.

3.7. Оценка влияния коэффициентов корреляционной сцепленности на прогноз числа необходимых статистических критериев

Так как мы имеем возможность легко моделировать показатель симметричной корреляционной сцепленности для разного числа симметричных нейронов, мы можем многократно повторить численный эксперимент для 5, 11, 21 искусственного нейрона. На рис. 3.7 приведены данные численных экспериментов. Выбор ограничения в 21 симметричный искусственный нейрон обусловлен 64-разрядной сеткой вычислительных машин. При большом числе искусственных нейронов утрачивается стабильность результатов моделирования.

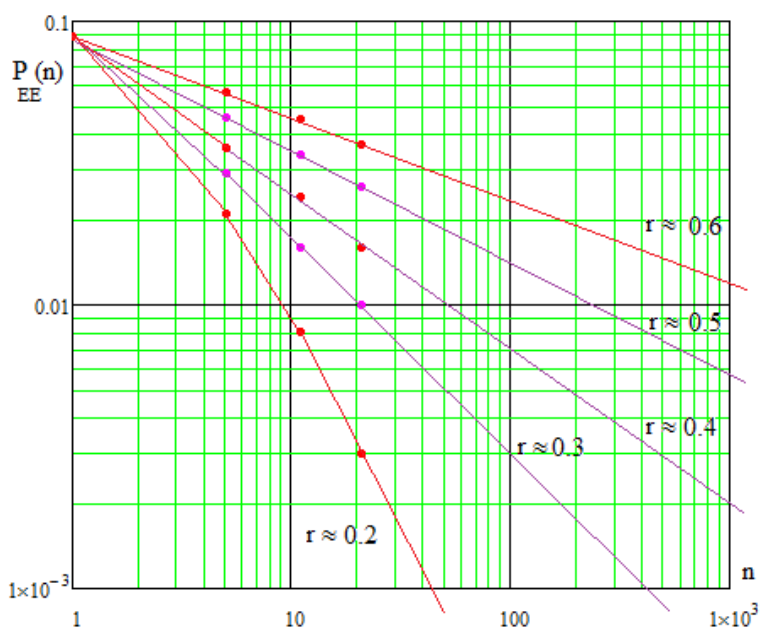


Рис. 3.7. Хорошая практика линейной экстраполяции данных в пространстве двойного логарифмирования результатов численного эксперимента

Из рис. 3.7 мы видим, что результаты численного моделирования для искусственных нейронов с высоким уровнем взаимной коррелированности разрядов выходного кода от $r = 0.3$ и выше хорошо описываются линейной экстраполяцией. В пределе при $r = 1.0$ должна получаться горизонтальная линия, так как при полностью коррелированных данных никакого «обогащения» быть не может.

При низких уровнях взаимной корреляции разрядов кода хорошая экстраполяция результатов численного моделирования получается при использовании полиномов второго порядка.

Еще одним важным моментом является то, что относительная простота экстраполяции данных в пространствах двойного логарифмирования является предпосылкой для упрощения очень сложных вычислений, требующих высокой разрядности в обычной математике, за счет перехода к соответствующим таблицам линейной экстраполяции [58, 59, 60, 61]. Подобные вычисления дают приближение приемлемой для практики точности при их реализации на 8-разрядных процессорах и даже на 4-разрядных процессорах.

Появление линий в пространстве логарифмирования по обоим координатам однозначно свидетельствует о фрактальной природе рассматриваемого класса задач [62, 63]. Большие сети искусственных нейронов очень эффективны в вычислительном отношении именно потому, что реализуют фрактальную математику в пространствах с дробными показателями размерности (дробными операторами, дробными производными, дробными интегралами [64]).

3.8. Моделирование бинарных искусственных нейронов Гири через использование симметризованных корреляционных матриц

В первой главе на рис. 1.8 дано описание бинарного искусственного нейрона Гири с порогом квантования $k = 0.88$ и значением равновероятных ошибок первого и второго рода 0.119. Рассмотрим поведение групп подобных искусственных нейронов. Для того, чтобы выполнить соответствующие численные эксперименты, необходимо симметризовать модель статистического критерия Гири. Для этого необходимо заменить изначально асимметричные законы распределения критерия Гири нормальными распределениями, как это показано на рис. 3.8.

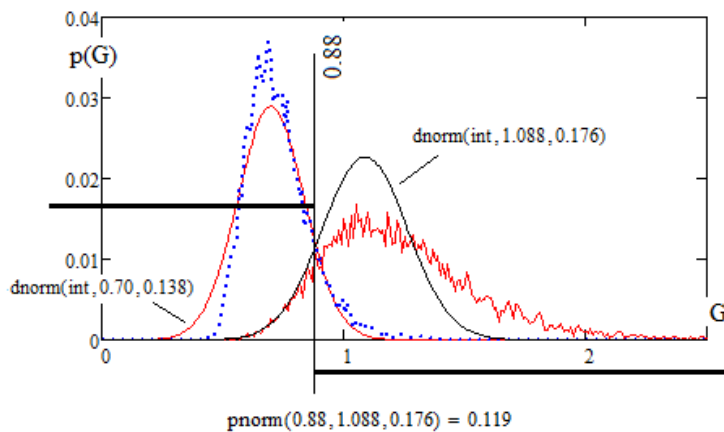


Рис. 3.8. Симметричный эквивалент статистического критерия Гири после замены его реальных распределений двумя нормальными законами малых выборок по 16 опытов

При подборе параметров двух нормальных распределений необходимо, чтобы их перехлест был близок к перехлесту приближаемых асимметричных распределений реальных данных. Преимущество бинарных нейронов состоит в том, что для них важна именно точка пересечения разделяемых статистических распределений при условии равных значений вероятности появления ошибок первого и второго рода.

3.9. Моделирование симметричных нейронов Гири при коэффициенте корреляционной сцепленности $r = 0.5$ и вероятностями ошибок $P_{EE} = 0.251$

Выше был показан принцип приближенного описания поведения нейрона Гири через использование двух нормальных законов. Необходимость этого искусственного приема обусловлена тем, что нормальные законы распределения значения получаются при моделировании зависимых данных. Если мы моделируем нейрон Гири для независимых данных, то они легко могут быть получены как от программного генератора нормальных данных, так и от программного генератора равномерно распределенных данных. Программное связывание данных (см. рис. 3.4.) всегда нормализует данные. Если входные данные нормальные, то связывание не меняет закон распределения. Если же мы попытаемся получить связанные данные с равномерным законом распределения, то для этого придется писать достаточно сложное собственное программное обеспечение. Сегодня нет таких программных псевдослучайных генераторов ни в одной среде математического моделирования.

Если же пользоваться приближением рис. 3.8, то вполне достаточно стандартного генератора псевдослучайных чисел с равномерным законом распределения среды моделирования MathCAD. Программа реализации соответствующего численного эксперимента приведена на рис. 3.9.

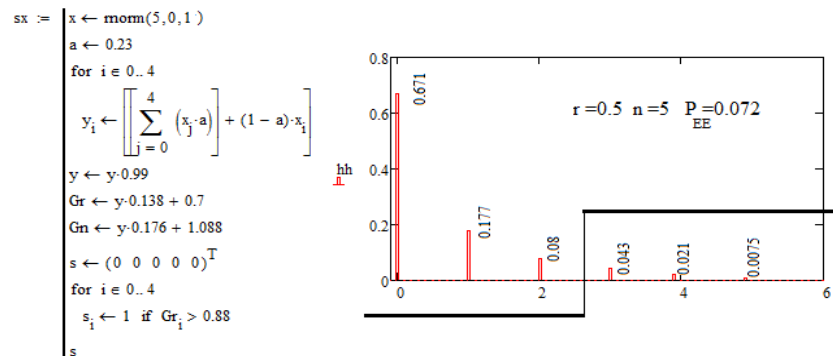


Рис. 3.9. Численный эксперимент по моделированию симметризованного нейрона Гири при высоком уровне корреляционной сцепленности его откликов $r = 0.5$

В правой части этого рисунка дан спектр Хэмминга расстояний между идеальным кодом откликом пяти нейронов «00000» и иными кодами откликами на нормальные входные данные. Корректировка ошибок выполнялась голосованием по «большинству». В итоге вероятности ошибок каждого нейрона 0.119 удается снизить до значения 0.072.

3.10. Перспектива перехода к использованию четверичных нейронов Гири

Одной из значимых особенностей искусственных нейронов является возможность их усложнения за счет замены в них простейшего бинарного квантователя на более сложный квантователь с большим числом возможных выходных состояний [55, 56]. На рис. 3.10 отражены результаты моделирования симметризованного нейрона Гири с выходным квантователем, имеющим четыре выходных состояния.

В правой части рисунка представлены полочки четырех выходных уровней квантователя на фоне реальных распределений асимметричного нейрона и симметризованного нейрона Гири. Ниже представлены отображения двух дискретных спектров Хэмминга. Вертикальными линиями представлен спектр Хэмминга для нормальных данных, точками представлен спектр Хэмминга для малых выборок с равномерно распределенными данными.

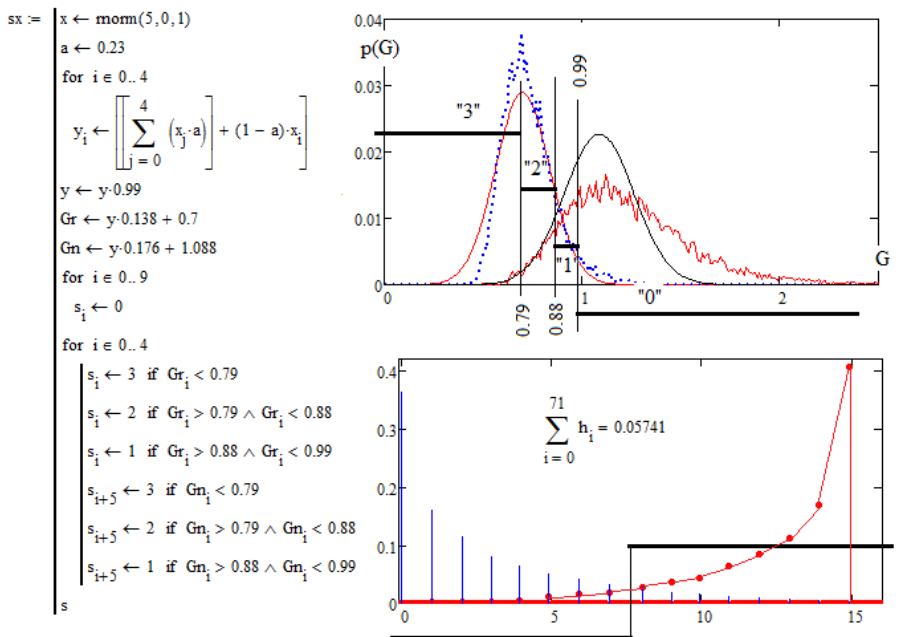


Рис. 3.10. Моделирование симметризованного нейрона Гири с выходным квантователем, имеющим четыре выходных состояния

В итоге мы наблюдаем снижение уровня вероятности ошибок с 0.072 для бинарных нейронов Гири до величины 0.057 для аналогичных четверичных нейронов Гири. Эта ситуация иллюстрируется рис. 3.11.

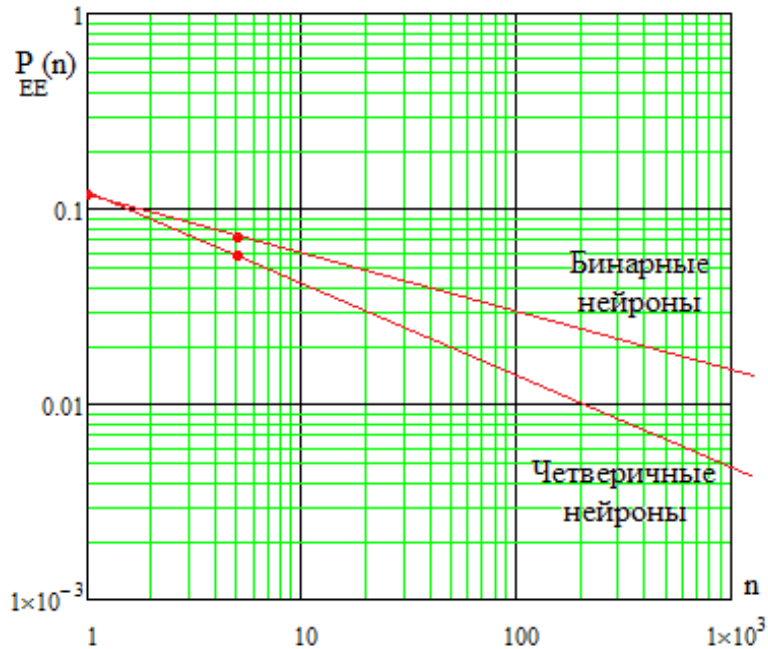


Рис. 3.11. Прогноз выигрыша, возникающего при замене бинарных нейронов Гири четверичными нейронами Гири

Из рисунка видно, что для достижения доверительной вероятности 0.99 потребуется примерно 2000 бинарных нейронов. Если же мы перейдем к использованию четверичных нейронов, то нам потребуется только 200 нейронов с характеристиками близкими к нейронам Гири. Простой заменой сравнения с одним порогом на сравнение с тремя порогом удалось убрать (сделать виртуальными) 1800 нейронов.

Именно по этой причине все естественные нейроны живых существ многоуровневые. По данным физиологов естественные нейроны обмениваются между собой пачками импульсов с меняющимся числом импульсов в пачке [64]. Видимо, именно использование искусственных нейронов с многоуровневыми квантователями обеспечивает огромное снижение необходимого числа нейронов у живых существ. По сути дела, в ближайшее время будет происходить повсеместная замена широко используемых бинарных нейронов на их более сложные, но и более эффективные q-арные искусственные нейроны. Выше приведен пример замены бинарных нейронов на 4-арные нейроны. Однако переход к еще более сложным 5-арным, 6-арным, 7-арным нейронам должен

давать преимущества нарастающего уровня [55, 56]. Замена простейших бинарных нейронов q -арными нейронами – это бионика или копирование принципов организации живой природы.

3.11. Оценка роста качества принимаемых решений при переходе к использованию троичных и пятеричных искусственных нейронов при $r = 0.431$ и вероятностями ошибок $P_{EE} = 0.251$

Будем рассматривать пять следующих классических статистических критериев:

- Андерсона – Дарлинга (1952) – AD;
- нормированного размаха (1954) – Rs;
- Васичека (1976) – V5;
- Фроцини (1978) – Fr;
- четвертого статистического момента (1934) – μ_4 .

Симметризация задачи объединения критериев {AD; Rs; V5; Fr; μ_4 } дает эквивалентные симметричные нейроны, которые имеют одинаковые вероятности ошибок первого и второго рода на уровне 0.251. Оценка выполнена через вычисление среднего геометрического всех подобных показателей по каждому из рассматриваемых критериев. Усреднение модулей коэффициентов корреляции, рассматриваемых критериев дает значение 0.431. В результате мы имеем для каждого из пяти симметризованных нейронов статистическую модель, представленную на рис. 3.12.

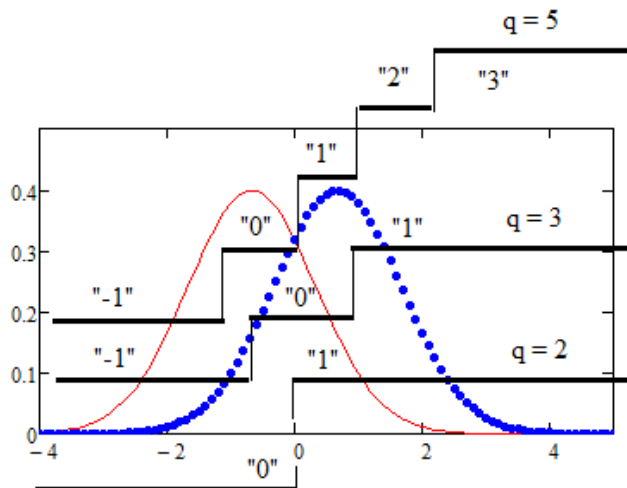


Рис. 3.12. Симметричная статистическая модель откликов одного из пяти нейронов на входные нормальные данные (непрерывное распределение) и равномерные входные данные (точечная линия) для малых выборок объемом в 16 опытов

Если объединять пять бинарных искусственных нейронов, то мы получим спектр из шести линий Хэмминга, приведенный на рис. 3.13.

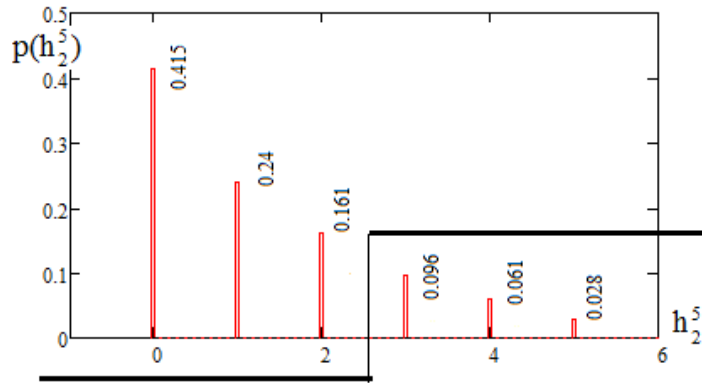


Рис. 3.13. Шесть спектральных линий Хэмминга для выходных бинарных кодов с 5-кратной избыточностью {AD; Rs; V5; Fr; μ_4 }

Подсчет амплитуд вероятности появления трех последних спектральных линий дает значение вероятностей ошибок второго рода $P_2 \approx 0.191$. Это лучше, чем вероятность $P_2 \approx 0.251$, которую дает любой из пяти симметричных нейронов на 31 %. Такой уровень снижения вероятности ошибок обусловлен уровнем корреляционной сцепленности $r = 0.431$ между выходными состояниями симметричных нейронов. При снижении уровня корреляционной сцепленности выигрыш от объединения пяти искусственных нейронов будет увеличиваться.

Если мы перейдем к использованию пяти троичных искусственных нейронов, то число спектральных линий Хэмминга увеличивается до $(3 \times 5 + 1) = 16$, 11 из них отображены на рис. 3.14. Четыре из 16 спектральных линий расстояний Хэмминга на рисунке отсутствуют из-за малой вероятности их появления в выборке 9999 опытов.

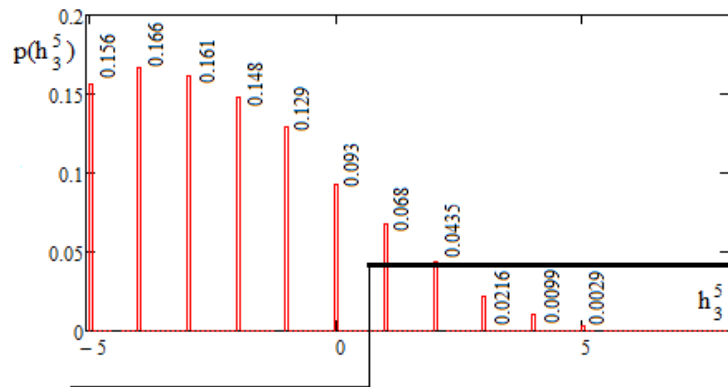


Рис. 3.14. Рост числа спектральных линий расстояний Хэмминга для пяти троичных искусственных нейронов

После коррекции ошибок по большинству состояний кода происходит снижение вероятности появления ошибок до величины 0.141 при порогах квантования $k = \{-0.671; +0.671\}$. Это примерно на 34 % меньше, чем для спектра двоичных нейронов предшествующего рисунка.

Переход к использованию 5-арных симметризованных искусственных нейронов позволяет увеличить число наблюдаемых спектральных линий Хэмминга до 17, как это показано на рис. 3.15.

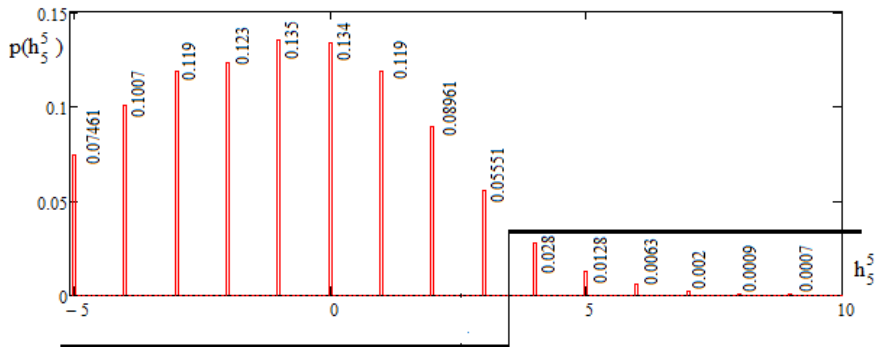


Рис. 3.15. Семнадцать спектральных линий расстояний Хэмминга для 5-арных симметризованных искусственных нейронов

При этом после обнаружения и исправления ошибок в избыточном коде вероятность их появления снижается до значения 0.051 при порогах квантования $k = \{-1.0, 0.0, 0.671, 2.13\}$. Сопоставление данных удобно выполнять в логарифмических масштабах переменных.

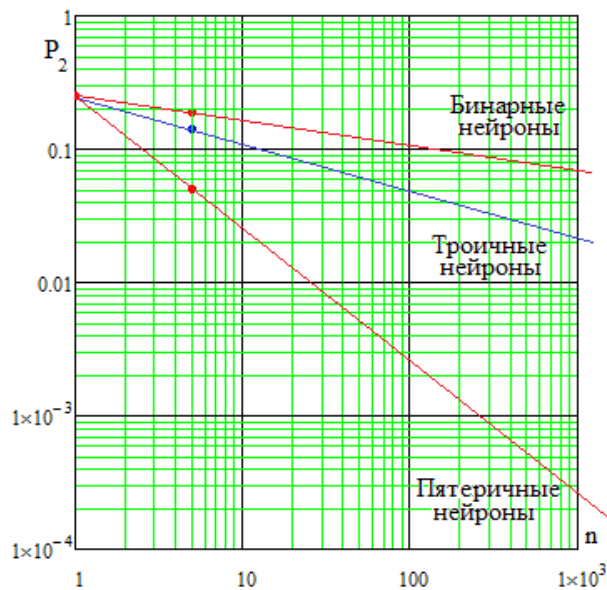


Рис. 3.16. Прогноз достижимых вероятностей ошибок второго рода при разном числе нейронов, имеющих многоуровневые квантователи

По данным рис. 3.16 при вероятности ошибок 0.251 симметризованных искусственных нейронов и их корреляционной сцепленности 0.431 для принятия решений с доверительной вероятностью 0.993 будет достаточно использования примерно 40 искусственных нейронов.

Заключение по главе 3

Усилиями исследователей прошлого века было создано примерно 200 статистических критериев для проверки той или иной статистической гипотезы [3]. К сожалению, все эти одиночные критерии ориентированы на большие выборки в 200 и более экспериментальных значений. Начинающие исследователи, как правило, ограничены в доступных для них ресурсах. Если студент или аспирант провел своими руками 20 опытов и получил столь малую экспериментальную выборку, то еще вчера он был бы обречен на недоверие к его исследованиям со стороны старших коллег из-за «невозможности» доказать статистическую значимость своих выводов.

Я уверен в том, что уже сегодня можно изменить ситуацию. Любой классический статистический критерий можно представить как искусственный нейрон. По крайней мере, в этом справочнике приведены примеры 20 искусственных нейронов, построенных на преобразованиях, заимствованных у 20 классических критериев. Более того, возможно мультипликативное комбинирование разных статистических критериев, т.е. из 200 классических критериев желательно проверить на перспективность примерно 10 000 их мультипликативных пар. Это значительная работа, которую нельзя выполнить силами малого коллектива. Именно осознание больших объемов предстоящей работы и стало побудительной причиной написания данного справочника.

Существующие компьютеры позволяют выполнять очень сложные вычисления. По этой причине всегда есть возможность обменять рост сложности вычислений на рост точности оценок. В рамках линейной алгебры сделать это крайне трудно из-за так называемого «проклятия размерности». В рамках нелинейной алгебры нейросетевых функционалов таких ограничений нет. Нейросетевые функционалы могут быть очень устойчивы. Все рассмотренные в данном справочнике нейроны эквивалентные классическим статистическим критериям и эквивалентные новым статистическим критериям устойчивы на малых выборках. Можно собирать из них какие угодно длинные

однослойные сети искусственных нейронов. Чем больше нейронов объединены, тем выше выходная избыточность нейрокодовой конструкции, способной обнаруживать и устранять противоречия, возникающие между решениями одиночных искусственных нейронов.

ЗАМЕНА КЛАССИЧЕСКИХ БИНАРНЫХ КОДОВ С ОБНАРУЖЕНИЕМ И ИСПРАВЛЕНИЕМ ОШИБОК НА МНОГОСЛОЙНЫЕ, БЫСТРО ОБУЧАЕМЫЕ СЕТИ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОНОВ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВОЗБУЖДЕНИЯ

4.1. «Нечеткие экстракторы» как предшественники однослойных сетей искусственных нейронов

Так называемые «нечеткие экстракторы» были созданы в конце прошлого века [66, 67, 68, 69, 70, 71]. Идея их конструкции поясняется рис. 4.1.



Рис. 4.1. Формирование и использование «нечеткого контейнера» со свертыванием избыточного кода, способного обнаруживать и исправлять ошибки

Входные биометрические данные, например, полученные из динамики рукописного почерка, всегда имеют некоторое наиболее вероятное значение для всех пользователей. Это означает, что мы заранее для всех данных можем указать их порог квантования. Например, в качестве порога может быть выбрано значение математического ожидания, анализируемой выборки. Можно считать, что каждый биометрический параметр после такого квантования дает состояние «0», если его значение меньше математического ожидания. Если его значение больше порога, то будем получать значение «1». Как результат мы получим длинный выходной код, повторяющийся примерно на 70 % при разных примерах предъявляемого образа «Свой».

К сожалению, такой код мы не можем использовать для криптографической аутентификации пользователей. Даже ошибки в один бит в ключе аутентификации достаточно, чтобы получить отказ в доступе.

К сожалению, классические бинарные коды с обнаружением и исправлением ошибок плохо корректируют часто встречающиеся ошибки. Относительно просто удается обнаруживать и исправлять 5 % ошибок [72]. Половину ошибок в коде исправлять теоретически невозможно при любом объеме кодовой избыточности. Для исправления 30 % ошибок в коде необходимо обеспечить примерно 30-кратную кодовую избыточность. При этом мы должны сталкиваться с 30-кратным снижением длины выходного кода криптографического ключа.

Следует подчеркнуть, что вектор биометрических данных всегда имеет конечную длину. Получение реальных биометрических данных является проблемой, так как фирмы производители средств биометрической аутентификации не предоставляют доступ к их кодам. Единственным исключением является АО «Пензенский научно-исследовательский электротехнический институт», создавший в 2009 г. среду моделирования «БиоНейроАвтограф» для свободного использования студентами русскоязычных университетов [73–76]. Среда моделирования организована так, что после каждого ввода рукописного пароля программа записывает в файл «params.txt» 416 биометрических параметров.

Последнее означает, что квантованием «сырых» параметров мы получаем кодовую последовательность длиной в 416 бит «сырого» криптографического ключа. При этом примерно 30 % бит «сырого» ключа будут ошибочными. Для того, чтобы исправить все 30 % ошибок, нужен код с 30-кратной избыточностью, т.е. выходной код верного криптографического ключа должен иметь длину не более $416/30 \approx 14$ бит. Эта ситуация отображена в левой части рис. 4.2.

Получается, что для всех «нечетких экстракторов» выходные ключи криптографической аутентификации всегда должны быть много короче по отношению к длине вектора анализируемых биометрических параметров.

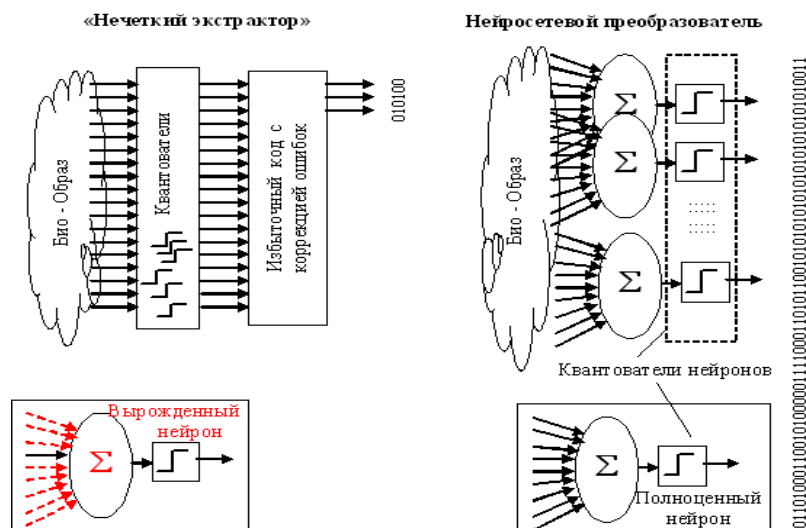


Рис. 4.2. Два подхода к обогащению «сырых» биометрических данных

В свою очередь, длина векторов биометрических параметров всегда конечна, всегда хочется увеличить длину вектора анализируемых биометрических параметров. Однако это технически невозможно.

4.2. Использование сетей искусственных нейронов для обогащения «сырых» биометрических данных перед их квантованием

Нестабильность выходного кода «нечетких экстракторов» обусловлена низким качеством «сырых» биометрических данных. Очевидно, что мы можем воспользоваться сумматорами искусственных нейронов для обогащения «сырых» данных. Чем хуже качество «сырых» данных, тем больше должно быть входов у сумматоров нейронов. Так как среда моделирования «БиоНейроАвтограф» ориентирована на написание рукописного пароля манипулятором «мышь», сырые биометрические данные имеют низкое качество. В связи с этим поднять качество до требуемого уровня удастся, если искусственные нейроны будут иметь по 24 входа. Если бы качество биометрических данных было выше, то число входов у нейронов могло быть меньше. Для рукописных данных, получаемых с графического планшета, сумматоры искусственных нейронов могут иметь по 16 входов.

В правой части рисунка приведена структура нейросетевого преобразователя биометрических данных в код длиной 256 бит. Каждый нейрон преобразователя отвечает за один бит ключа, обучение каждого нейрона выполняется за один шаг (не является итерационным).

При вычислениях весовых коэффициентов искусственного нейрона используются данные о математических ожиданиях и стандартных отклонениях входных биометрических параметров. Подключение 24 входов каждого нейрона к вектору из 416 биометрических параметров выполняется случайным выбором.

При 24 входах у каждого нейрона и весовых коэффициентах, вычисленных по алгоритму ГОСТ Р 52633.5–2011, нейросетевой преобразователь в целом позволяет получать верный ключ с вероятностью 0.9 (на 10 верных ключей появляется один ключ с ошибками). Как итог, нейросетевой преобразователь биометрии легко справляется с длинными ключами в 256 бит. На тех же данных «нечеткий экстрактор» с доверительной вероятностью 0.9 позволяет получить только короткие ключи длиной в 14 бит.

Формально любой «нечеткий экстрактор» можно рассматривать как вырожденный нейросетевой преобразователь, у которого искусственные нейроны вырождены (имеют только один вход и потому не способны осуществлять обогащение входных данных за счет их суммирования).

4.3. Влияние уровня обогащения данных (числа входов у искусственного нейрона) на ширину выходных спектров расстояний Хэмминга «Свой» и «Чужие»

Рассмотрим более подробно то, чем отличаются механизмы работы «нечетких экстракторов» от механизмов работы нейросетевых преобразователей биометрии в длинный код криптографического ключа. Будем исходить из того, что рукописный образ «Пенза» дает распределение математических ожиданий биометрических параметров, представленное на рис. 4.3.

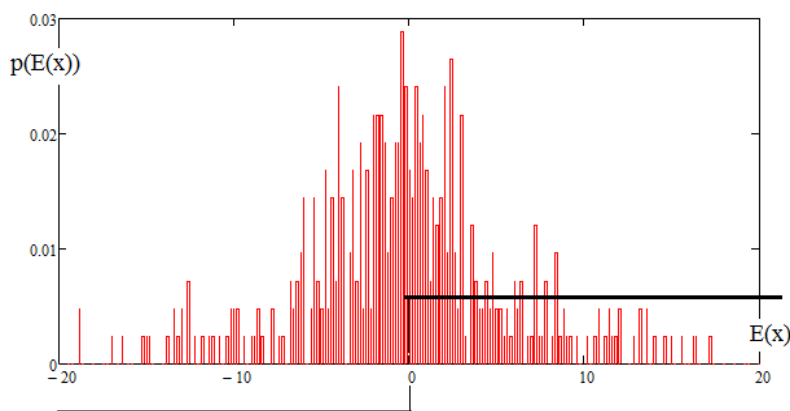


Рис. 4.3. Распределение математических ожиданий 416 биометрических параметров рукописного слова «Пенза», вычисленных по 16 примерам обучающей выборки

Из рис. 4.3. мы видим, что математическое ожидание контролируемых биометрических параметров близко к нулевому значению. В связи с этим будем рассматривать порог $k = 0.0$, используемый при квантовании «сырых» данных «нечетким экстрактором». Кроме того, будем рассматривать простейший «сырой» ключ, состоящий только из 416 нулей «000..00». Тогда статистику состояний выходных кодов «нечеткого экстрактора» можно описать двумя распределениями расстояний Хэмминга, приведенными на рис. 4.4.

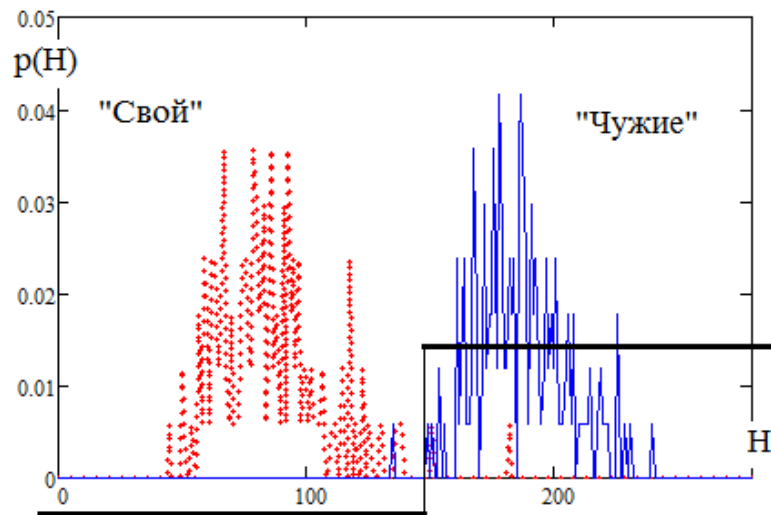


Рис. 4.4. Расстояния Хэмминга между кодами примеров образа «Свой» и примерами образов «Чужие»

Выходной код ключа из 416 нулей удобен тем, что подсчет расстояний Хэмминга до других кодов выполняется простым подсчетом числа единиц в коде. Из рис. 4.4 следует, что в наиболее вероятном случае выходной код образа «Свой» будет содержать примерно 90 состояний «1» в 416 разрядах (326 разрядов должны иметь состояние «0»). Наиболее вероятное число ошибок в коде составит примерно $326/90 \approx 36\%$.

Для образов «Чужие» число состояний «0» и число состояний «1» должно быть примерно одинаково. В идеале применения хорошо сбалансированной тестовой выборки математическое ожидание расстояний Хэмминга «Чужие» должно быть примерно $416/2 = 208$ бит. При этом наиболее вероятное число ошибок в коде «Чужой» должно составить примерно 50%. Так как тестовая выборка «Чужой» оказалась плохо сбалансированной, математическое ожидание расстояний Хэмминга на рис. 4.4 оказалось ниже 208 бит.

Если бы мы заранее знали параметры распределений расстояний Хэмминга, то могли бы в пространстве Хэмминга синтезировать близкий

к «идеальному» корректору ошибок в кодах. Для этого достаточно выбрать порог квантования $k \approx 150$ бит. Тогда все коды, содержащие менее 150 состояний «1», должны рассматриваться как отклики на образ «Свой». Все коды, имеющие 150 разрядов и более, с состояниями «1» должны рассматриваться как коды-отклики на образы «Чужой».

Если мы захотим изменить ситуацию, перейдя к нейронным сетям, то следует задаться числом входов у искусственных нейронов. Выберем использование искусственных нейронов с четырьмя входами. Для сохранения исходных условий задачи будем использовать нейросеть с 416 нейронами. Тогда по ГОСТ Р 52633.5–2011 следует выбирать случайное подключение входов каждого нейрона к вектору 416 входных биометрических параметров. Если мы вычислим параметры весовых коэффициентов каждого нейрона по ГОСТ Р 52633.5–2011 для криптографического ключа с 416 битами состояний «0» и перейдем в пространство расстояний Хэмминга, то получим два распределения рис. 4.5.

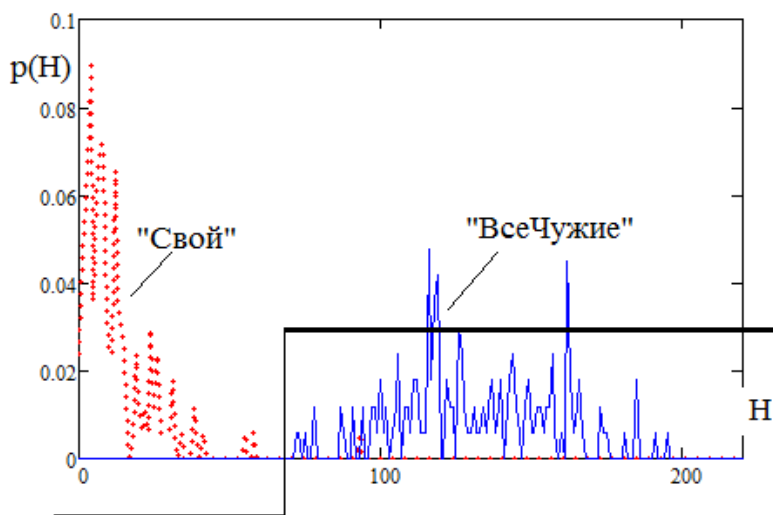


Рис. 4.5. Распределение расстояний Хэмминга для кодов длиной в 416 бит, обогащенных нейронами с 4 входами

Сравнивая данные двух последних рисунков, мы замечаем, что распределение расстояний Хэмминга «Свой» из нормального превратилось в хи-квадрат распределение. При этом наблюдается сжатие ширины спектра этих распределений. Так, интервал возможных значений спектра Хэмминга для образа «Свой» рис. 4.4 составляет $180 - 40 = 140$ бит. Для рис. 4.5 этот интервал составляет только 90 бит.

Для спектра расстояний Хэмминга наблюдается обратная ситуация. «Нечеткий экстрактор» имеет ширину спектра расстояний Хэмминга в $250 - 140 = 110$ бит. Нейронная сеть имеет спектр расстояний Хэмминга в $200 - 70 = 130$ бит для образов «Чужие». Наблюдаем

расширение интервала возможных состояний этого спектра при росте уровня обогащения данных.

Усилим обогащение данных «Свой», увеличив число входов у нейронов до 8. В итоге мы получим распределения разделяемых спектров, представленные на рис. 4.6.

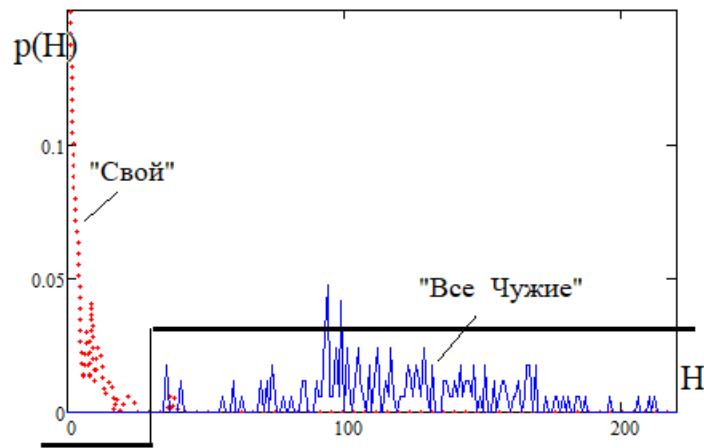


Рис. 4.6. Распределения расстояний Хэмминга для образа «Свой» и образов «Чужие» на выходах нейросети с 416 нейронами, каждый из которых имеет по 8 входов

Мы вновь наблюдаем сжатие интервала распределения значений спектра «Свой» до величины примерно в 45 бит. Спектр расстояний Хэмминга для образов «Чужой» продолжает расширяться до величины $220 - 30 = 190$ бит.

С ростом числа входов у нейронов спектр расстояний Хэмминга для образа «Свой» продолжает сжиматься. При 24 входах у нейронов спектр становится настолько узок, что с вероятностью 0.9 он будет попадать в интервал равный 1 биту.

4.4. Хи-квадрат нейрон Пирсона с кусочно-линейной функцией возбуждения

Все искусственные нейроны разделим на два больших класса. К первому классу будем относить персептроны, преобразующие континуумы входных данных в бинарный код выходным бинарным квантователем. Расширением этого класса следует считать q -арные искусственные нейроны (троичные, четверичные, пятеричные и т.д.), на выходе которых использованы многоуровневые квантователи. Эти математические конструкции весьма и весьма эффективны и рассмотрены в предыдущей главе данного справочника.

На ряду с q-арными нейросетевыми квантователями существуют континуальные нейроны с гладкими функциями возбуждения [77, 78]. Промежуточное положение между этими двумя большими классами занимают искусственные нейроны с кусочно-линейными функциями выходного преобразования. На рис. 4.7 представлен пример такого искусственного хи-квадрат нейрона Пирсона χ^2_{Lin} .

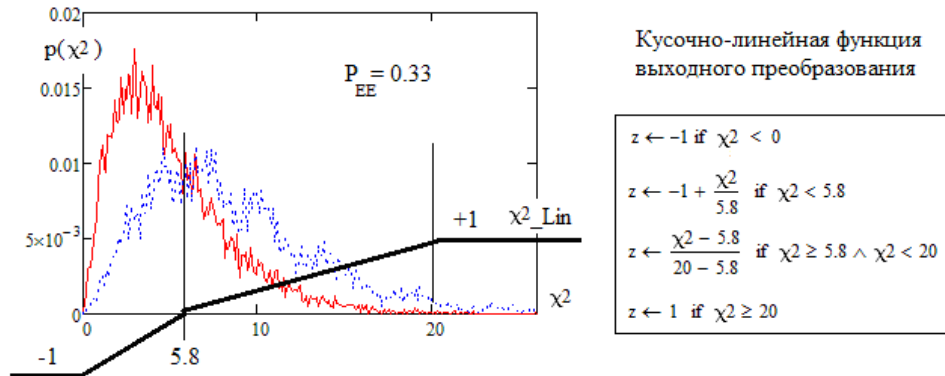


Рис. 4.7. Искусственный хи-квадрат нейрон Пирсона с кусочно-линейной функцией выходного преобразования

Как видно из рис. 4.7, кусочно-линейная функция преобразования собрана из четырех участков. Стыковка монотонно растущих участков кусочно-линейной функции выполнена в точке равновероятных ошибок первого и второго рода $\{k = 5.8 \text{ при } P_{EE} = 0.33\}$.

Следует обратить внимание на то, что при нейросетевом разделении асимметричных плотностей распределения значений кусочно-линейная функция выходного преобразования также должна быть асимметричной. В этом одно из преимуществ рассматриваемого класса нейросетевых преобразований. К сожалению, при использовании итерационных алгоритмов обучения многослойных нейронов с гладкими функциями выходного преобразования возможность их асимметричных искажений сегодня никто не учитывает [77, 78].

Кроме двух центральных кусков монотонно изменяющихся линейных функций, с правой и левой части примыкают куски участков линейного «насыщения», когда изменение входных данных не приводит к изменению отклика кусочно-линейной функции.

4.5. Искусственный нейрон четвертого статистического момента с кусочно-линейной функцией преобразования

Кусочно-линейные функции выходного деформирования данных иногда могут выглядеть практически как симметричные. В качестве

примера на рис. 4.8 приведен нейрон, эквивалентный критерию четвертого статистического момента.

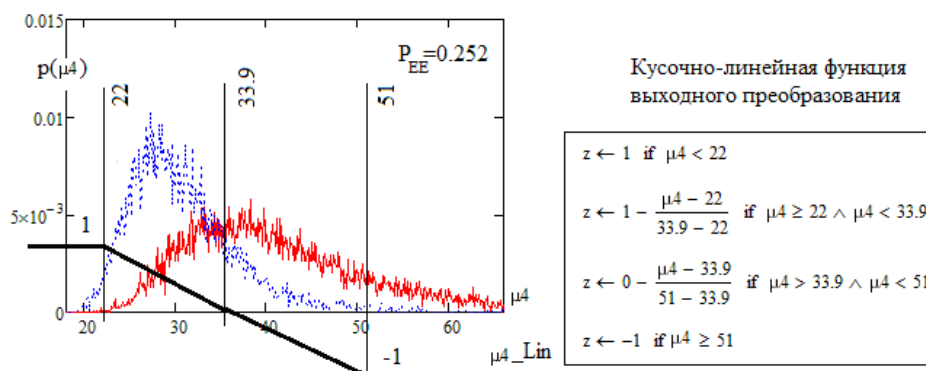


Рис. 4.8. Искусственный нейрон четвертого статистического момента с кусочно-линейной функцией выходного преобразования

Такой эффект возникает только в том случае, когда наклоны двух участков, сопрягаемых в точке равновероятных ошибок P_{EE} , совпадают (почти совпадают).

4.6. Искусственный нейрон Фроцини с кусочно-линейной функцией возбуждения

Как еще один пример почти симметричной функции кусочно-линейного преобразования можно рассматривать искусственный нейрон Фроцини, представленный на рис. 4.9.

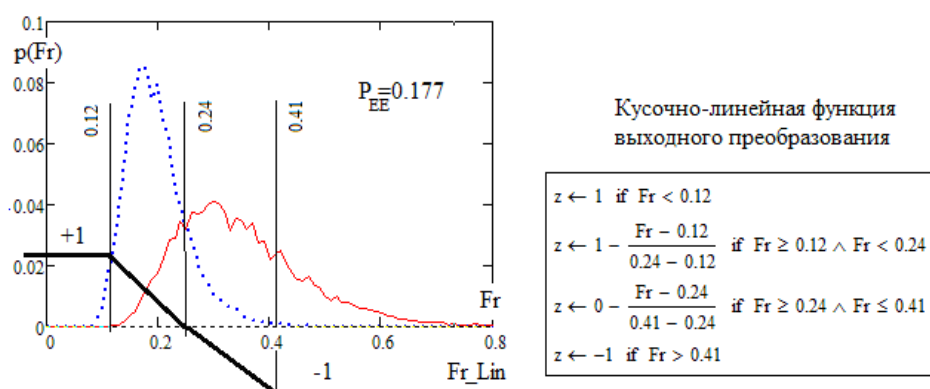


Рис. 4.9. Искусственный нейрон Фроцини с кусочно-линейной функцией выходного преобразования

Отметим, что во всех трех примерах перехода на участок линейного «насыщения» выбраны точки, переход через которые устраняет вероятностную неопределенность. Они находятся на краях разделяемых функций распределения нормальных данных и малых выборок с равномерно распределенными данными.

4.7. Двухслойная нейросеть, обобщающая выходные состояния искусственных нейронов Пирсона, Фроцини и четвертого статистического момента

4.7.1. Двухслойная нейросеть без учета уровня доверия к решениям объединяемых статистических критериев

Самым простым способом объединения выходных состояний трех рассмотренных выше искусственных нейронов является суммирование их откликов с усреднением и квантование полученных выходных состояний:

$$F_2 = \frac{f(\chi^2) + f(\mu_4) + f(Fr)}{3}. \quad (4.1)$$

На рис. 4.10 приведены итоговые распределения, полученные на выходе усредняющего накопления (4.1).

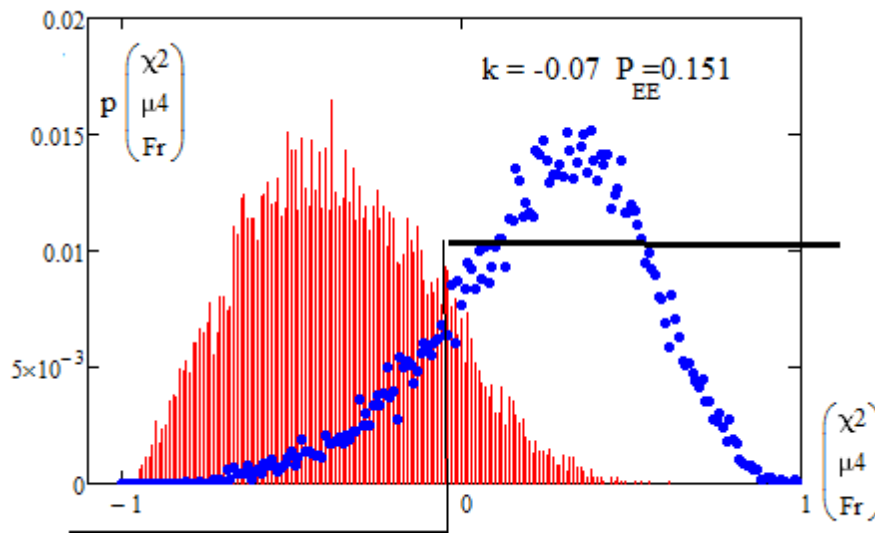


Рис. 4.10. Бинарный искусственный нейрон второго слоя

На этом рисунке иллюстрируется применение бинарного выходного квантователя для нейрона второго слоя, срабатывающего в точке равновероятных ошибок.

4.7.2. Учет доверия к решениям объединяемых статистических критериев

Повысить результат свертывания избыточности возможно, воспользовавшись заранее известными показателями доверия к тому или иному искусственному нейрону:

$$F_2 = \frac{(1-0,33) \cdot f(\chi^2) + (1-0,177) \cdot f(\mu_4) + (1-0,252) \cdot f(Fr)}{3}. \quad (4.2)$$

На рис. 4.11 приведены распределения на выходе суммирующего нейрона второго слоя.

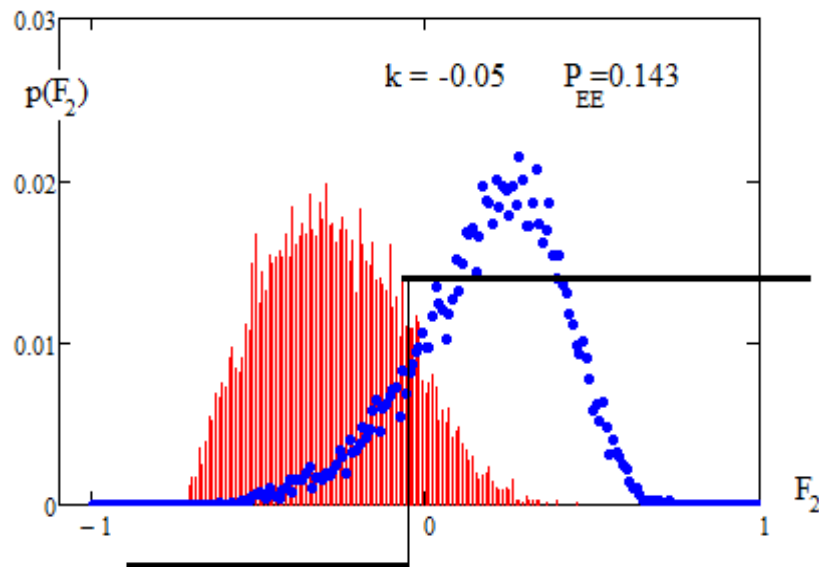


Рис. 4.11. Обобщение состояний нейронов Пирсона, четвертого статистического момента и нейрона Фроцини с учетом доверия к их частным решениям

Сравнивая данные двух последних рисунков, можно убедиться в том, что взвешенное с учетом доверия к элементам суммирование дает результат на 5,6 % лучше. На рис. 4.12 даются прогнозы для трех сравниваемых подходов, построенных на искусственных нейронах разного типа.

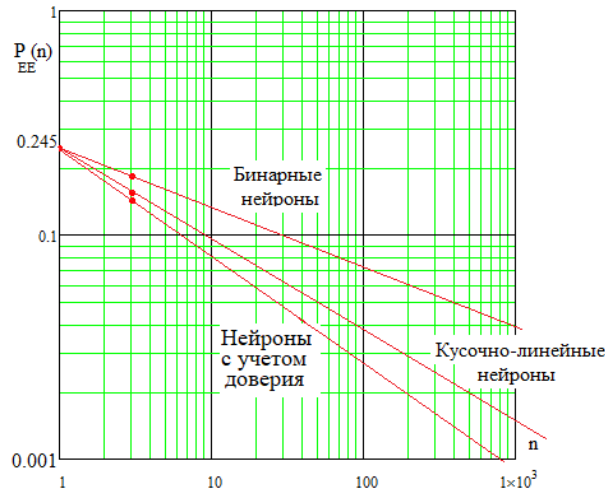


Рис. 4.12. Предсказание качества принимаемых решений нейронными сетями с разным числом искусственных нейронов для малой выборки в 16 опытов

Из рисунка следует, что бинарные нейроны работают хуже других типов искусственных нейронов. Самыми эффективными являются нейроны с кусочно-линейными выходными функциями при их взвешивании пропорционально доверию к нейронам первого слоя.

4.7.3. Использование сверточного искусственного нейрона minPooling во втором слое без учета доверия к частным решениям

Сверточный нейрон второго слоя выбирает минимальное значение у нейронов первого слоя по следующей формуле:

$$F_2 = \min(f(\chi^2), f(\mu_4), f(Fr)). \quad (4.3)$$

Результаты minPooling свертывания по формуле (4.3) приведены на рис. 4.13.

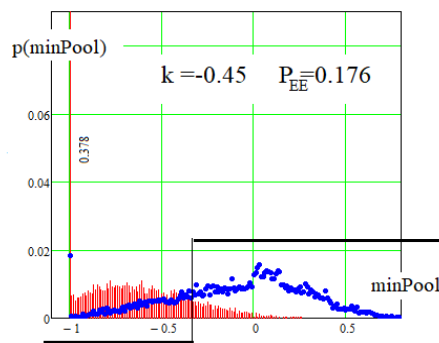


Рис. 4.13. Сверточный нейрон второго слоя, имеющий ярко выраженные выбросы плотностей распределения его откликов, без учета доверия к частным решениям

Из рис. 4.13 видно, что нормально распределенные данные, попадая на горизонтальный участок насыщения, дают выброс в одной точке спектра с амплитудой вероятности 0.378.

4.7.4. Использование сверточного искусственного нейрона minPooling во втором слое при учете доверия к частным решениям

Взвешивание данных нейрона второго слоя пропорционально доверию к нейронам первого слоя позволяет снизить вероятность ошибок на 2,3 %:

$$F_2 = \min((1 - 0,33) \cdot f(\chi^2), (1 - 0,177) \cdot f(\mu_4), (1 - 0,252) \cdot f(Fr)). \quad (4.4)$$

Спектры выходных состояний нейрона второго слоя приведены на рис. 4.14.

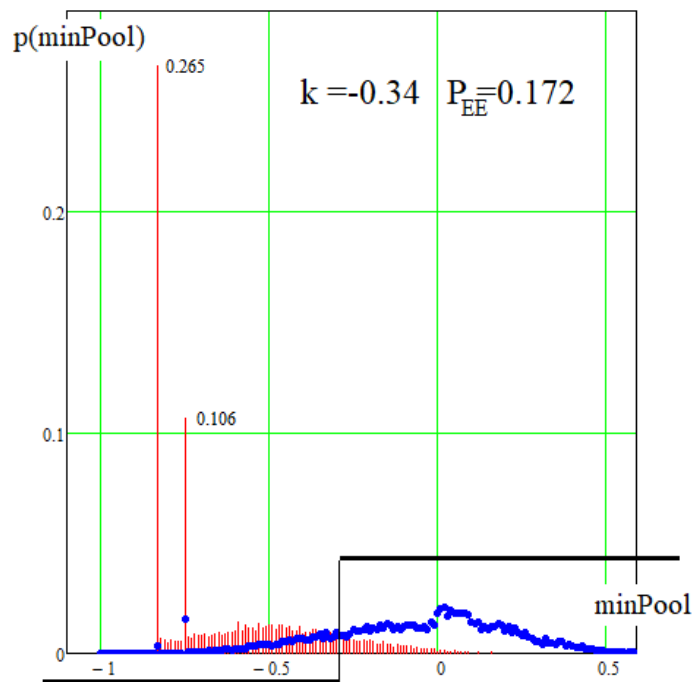


Рис. 4.14. Сверточный нейрон второго слоя, имеющий ярко выраженные выбросы плотностей распределения его откликов, учитывающий доверие к частным решениям

Из рис. 4.14 следует, что число значимых пиков амплитуд вероятности удваивается при взвешивании входных данных minPooling нейронов второго слоя.

4.8. Эффект отказа от наличия участков «насыщения» при программной реализации выходных кусочно-линейных функций искусственных нейронов

4.8.1. Хи-квадрат нейрон без участков «насыщения»

При использовании искусственных нейронов в многослойных сетях полезным является устранение горизонтальных участков насыщения через их замену на участки с малым наклоном. На рис. 4.15 приведены выходные состояния хи-квадрат нейрона и программная реализация линейного переключателя с одного на другой участок.

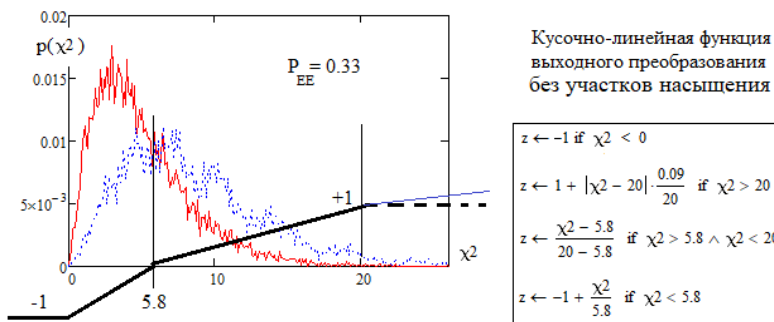


Рис. 4.15. Хи-квадрат нейрон с кусочно-линейной функцией выходного преобразования без участков «насыщения»

4.8.2. Искусственный нейрон четвертого статистического момента без участков «насыщения»

На рис. 4.16 приведена программная реализация кусочно-линейной функции выходных преобразований критерия μ_4 без горизонтальных участков насыщения.

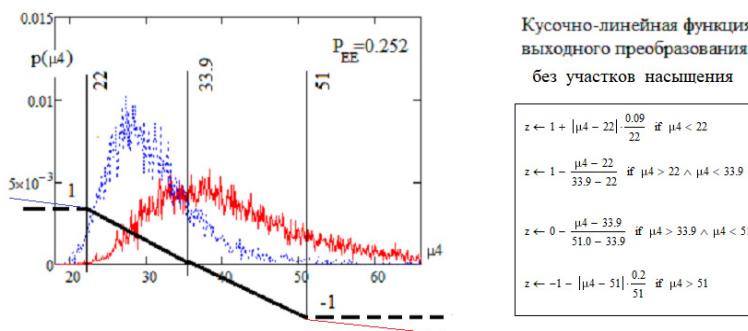


Рис. 4.16. Искусственный нейрон четвертого статистического момента с кусочно-линейной функцией выходного преобразования без участков «насыщения»

4.8.3. Искусственный нейрон Фроцини без участков «насыщения»

На рис. 4.17 приведена программная реализация кусочно-линейной функции выходных преобразований без критерия Фроцини горизонтальных участков насыщения.

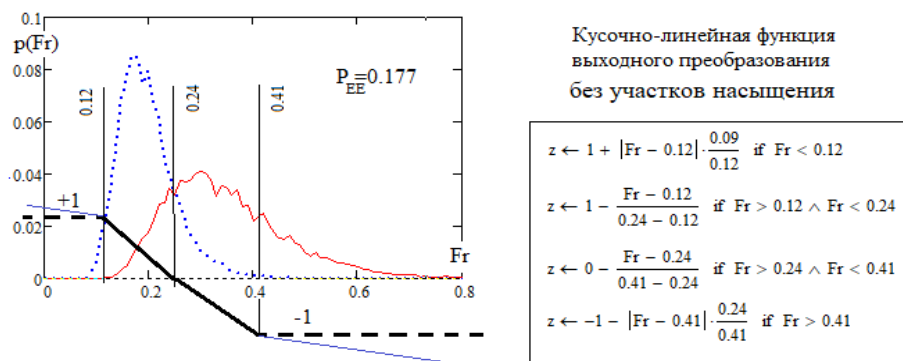


Рис. 4.17. Искусственный нейрон Фроцини с кусочно-линейной функцией выходного преобразования без участков «насыщения»

4.8.4. Объединение трех нейронов без участков «насыщения» minPooling сверточным нейроном без учета доверия к частным решениям

Следует отметить, что многослойные сети искусственных нейронов «глубокого обучения» сегодня получили широкое распространение при анализе геометрических особенностей лица пользователя и его голоса [79, 80]. Многослойные сети искусственных нейронов и метод их обучения обратным распространением ошибок еще в 1974 г. придумал наш соотечественник А. И. Галушкин [81]. К сожалению, на тот момент реализовать обучение действительно «глубоких» нейронных сетей было технически невозможно из-за весьма и весьма ограниченных ресурсов ЭВМ того времени.

Ситуация изменилась уже в начале этого века усилиями Дж. Хинтона. Сегодня технология «глубокого» итерационного обучения нейронных сетей на больших объемах в миллионы примеров лиц людей вышла из стадии исследований и активно используется промышленностью.

Как правило, промышленно применяемые многослойные сети искусственных нейронов могут иметь от 30 до 1000 слоев нейронов, причем обучение таких сетей ведется итерационно. Для всех итерационных алгоритмов обучения возможна ситуация попадания данных на участки насыщения нелинейных элементов нейронов. В этом случае дифференцирование данных перестает работать, наступает «паралич» итерационного алгоритма обучения.

Еще одним важным моментом является то, что многослойное обогащение данных внутри нейросети часто выполняют сверточными нейронами (реализуя на них операцию minPooling). На рис. 4.13, 4.14 приведены отклики таких нейронов с наличием огромных не дифференцируемых дельта выбросов. Если же мы переходим к кусочно-линейным выходным функциям без насыщения, то появляется возможность частичного дифференцирования «хвостов» распределений. Эта ситуация отображена на рис. 4.18.

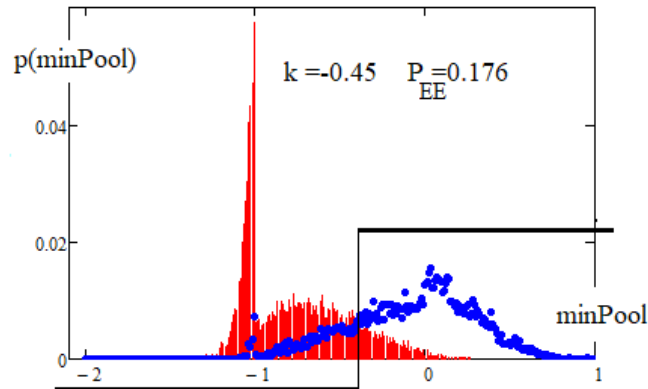


Рис. 4.18. Объединение трех нейронов без участков «насыщения» minPooling сверточным нейроном без учета доверия к частным решениям

Из этого рисунка видно, что информация о «хвостах» распределений, ранее попадавшая в слепую зону «насыщения», становится хорошо наблюдаемой. Предположительно, что в ближайшее время будут активно развиваться гибридные алгоритмы быстрого устойчивого обучения без итераций (аналоги ГОСТ Р 52633.5–2011), объединенные с обычными итерационными алгоритмами обучения нейронов внутри одного слоя. Реализуя итерационную часть донастройки искусственных нейронов одного слоя, придется вычислять производные достигнутого качества обучения. Реализация подобных алгоритмов вполне возможна как для данных, требующих обогащения (правая часть данных распределения), так и данных, образующих «выбросы хвостов», неверная обработка которых может приводить к ошибкам.

4.8.5. Объединение трех нейронов без участков «насыщения» minPooling сверточным нейроном при учете доверия к частным решениям

Если мы от преобразований при свертывании данных по формуле (4.3) перейдем к более сложной формуле вычислений (4.4), то качество принимаемых сверточными нейронами решений увеличивается примерно на 5,4 %. Эта ситуация отображена на рис. 4.19.

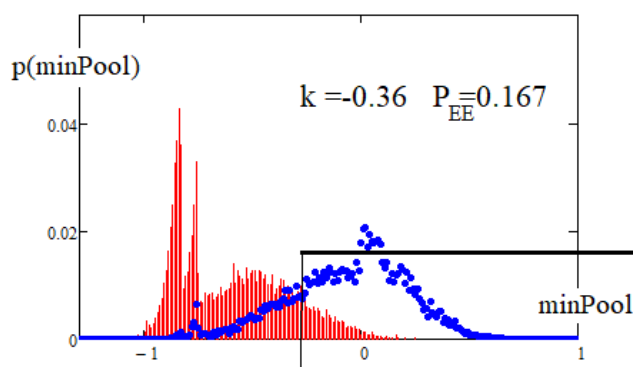


Рис. 4.19. Объединение трех нейронов без участков «насыщения» minPooling сверточным нейроном учитывающим уровнем доверия к частным решениям

Из рис. 4.19 видно, что число выбросов (число «хвостов») удвоилось. Повторяется та же ситуация, что наблюдается для рис. 4.13 и рис. 4.14.

4.9. Линейно-квадратичные функции предсказания качества решений, принимаемых искусственными нейронами

Однослойные сети искусственных нейронов с корректировкой избыточности выходных кодов «голосованием» по большинству разрядов удобны тем, что хорошо симметризуются. Как следствие, мы можем по ним строить прогноз результатов работы нейросетевых обобщений множества статистических критериев. В самом плохом случае, когда вероятности ошибок составляют значение $P_{EE} = 0,5$, имитационное моделирование дает результат, приведенный на рис. 4.20.

Такая «наихудшая» ситуация для задачи нейросетевого объединения статистических критериев при анализе малых выборок невозможна из-за того, что все статистические критерии даже для малых выборок в 16 опытов дают значения равновероятных ошибок менее 0.5. Однако именно значение равновероятных ошибок первого и второго рода предписывается искусственно создавать для нейросетевых преобразователей биометрия-код, обученных по ГОСТ Р 52633.5–2011. Необходимо, чтобы примеры образа «Свой» с высокой вероятностью давали на выходе обученной нейросети криптографический ключ (заданный на этапе обучения). Для случайного образа «Чужой» криптографический ключ на выходе нейросети должен быть случайным, а каждый разряд этого ключа должен иметь вероятности $P(\langle 0 \rangle) \approx 0.5 \approx P(\langle 1 \rangle)$.

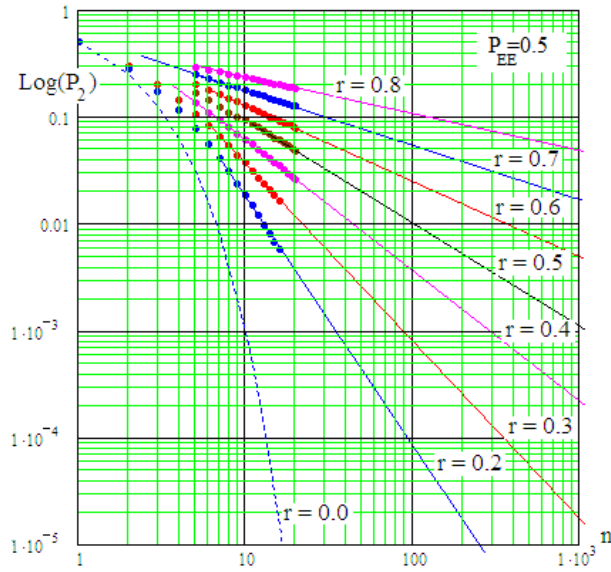


Рис. 4.20. Прогнозирование значений вероятностей ошибок первого и второго рода при наихудшей ситуации $P_{EE} = 0.5$

При решении задачи объединения множества статистических критериев при нейросетевом распознавании двух классов («нормальные» или «равномерные» данные малой выборки в 16 опытов) гораздо более реалистичной является ситуация $P_{EE} = 0.3$. Эта номограмма представлена на рис. 4.21.

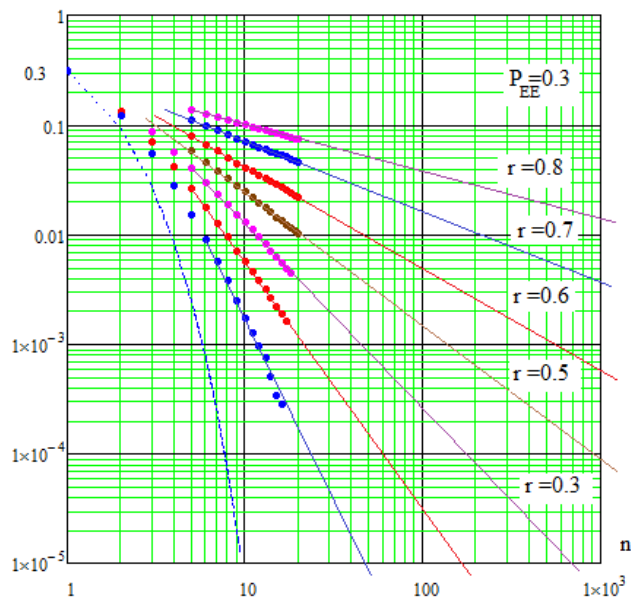


Рис. 4.21. Прогнозирование значений вероятностей ошибок первого и второго рода при реалистичном значении среднего геометрического вероятностей ошибок $P_{EE} = 0.3$

Следует отметить простоту перехода от рис. 4.20 к номограмме рис. 4.21. Для перехода от одной номограммы к другой достаточно выполнить сдвиг точек вниз, сохраняя исходную сетку логарифмических координат.

Если ориентироваться на использование лучших из рассмотренных в первой главе классических статистических критериев, то для них достаточно оптимистичным будет являться достижение значения среднего геометрического вероятностей ошибок $P_{EE} = 0.2$. Для этого случая соответствующая номограмма представлена на рис. 4.22.

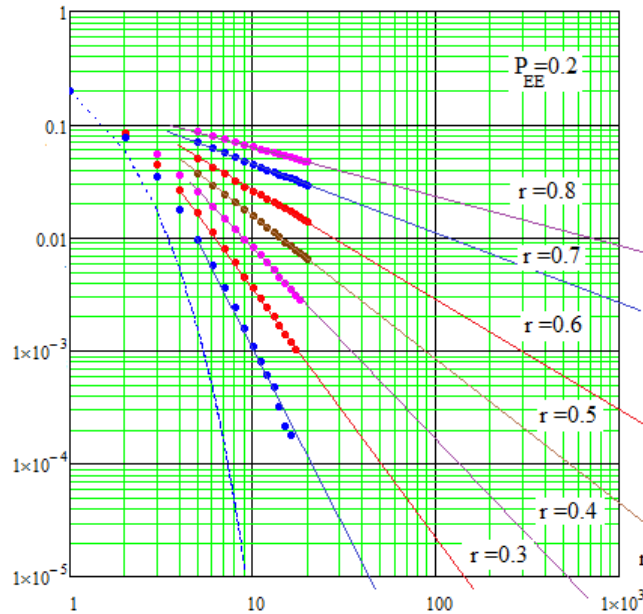


Рис. 4.22. Оптимистичное прогнозирование значений вероятностей ошибок первого и второго рода при ожидаемом значении среднего геометрического вероятностей ошибок классических критериев $P_{EE} = 0.2$

Если ориентироваться на использование самых лучших из рассмотренных в первой главе классических статистических критериев, то для них сверх оптимистичным будет являться достижение значения среднего геометрического вероятностей ошибок $P_{EE} = 0.1$. Для этого случая соответствующая номограмма представлена на рис. 4.23. Во второй главе было показано, что новые статистические критерии начала XX в. мощнее, чем критерии прошлого века. В этом плане условие $P_{EE} = 0.1$ для современных критериев уже не выглядит как слишком оптимистичное.

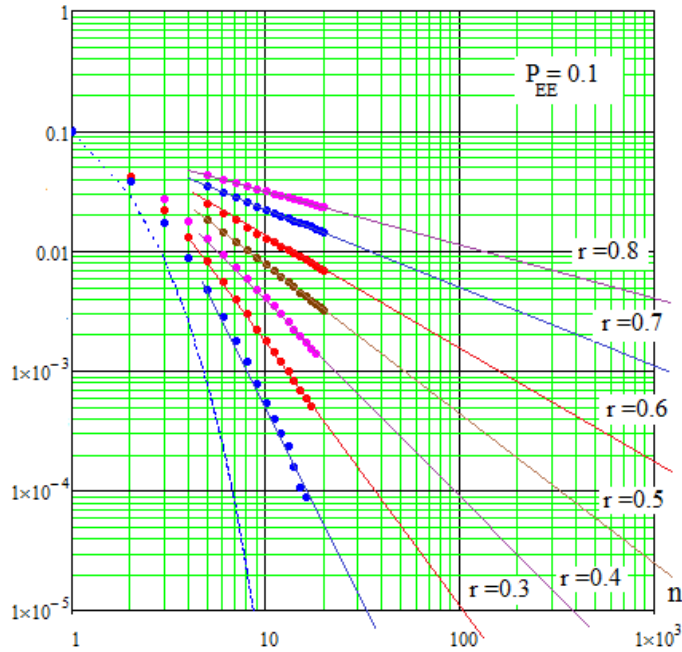


Рис. 4.23. Оптимистичное прогнозирование значений вероятностей ошибок первого и второго рода при ожидаемом значении среднего геометрического вероятностей ошибок классических критериев $P_{EE} = 0.1$ (как у лучших классических критериев)

Заключение по главе 4

Таким образом, мы имеем возможность существенно усложнять статистические вычисления, объединяя друг с другом значительное число разных статистических критериев. Это в конечном итоге и должно привести к получению нейросетевых решений с высокой достоверностью на малых выборках в 16 опытов.

Принципиально важным является то, что при нейросетевом обобщении множества статистических критериев возможно использование нескольких направлений приложения усилий:

- мы можем пойти по пути использования достаточно большого числа бинарных нейронов (в справочнике описан 21 искусственный нейрон, воспроизводящий классические статистические критерии прошлого века и 78 новых статистических критерия и эквивалентных им искусственных бинарных нейронов);

- если мы усложняем конструкцию искусственных нейронов, заменяя обычные бинарные нейроны на троичные нейроны, то получаем вполне ощутимые технические преимущества;

- еще одним перспективным направлением является переход к использованию многослойных сетей искусственных нейронов с кусочно-линейными функциями выходного преобразования, при этом

число слоев таких нейронных сетей не должно стать слишком большим. По теореме Колмогорова – Арнольда должно быть достаточно двух слоев искусственных нейронов, однако даже если число слоев будет 20, такие нейросетевые вычислители обучить будет не сложно. В данном справочнике показано, что обучение двухслойных нейронных сетей сложнее обучения однослойных нейронных сетей примерно в два раза. Предположительно, мы имеем дело с линейным усложнением задачи с ростом числа слоев искусственных нейронов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Литература к главе 1

1. ГОСТ Р 52633.5–2011. Защита информации. Техника защиты информации. Автоматическое обучение нейросетевых преобразователей биометрия-код доступа.

2. Иванов А. И., Сулавко А. Е. Проект третьего национального стандарта России по быстрому автоматическому обучению больших сетей корреляционных нейронов на малых обучающих выборках биометрических данных // Вопросы кибербезопасности. 2021. № 3 (43). С. 84–93.

3. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 816 с.

4. Р 50.1.037–2002 Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть I. Критерии типа χ^2 . Госстандарт России. М., 2001. 140 с.

5. Р 50.1.037–2002 Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии. Госстандарт России. М., 2002. 123 с.

6. Иванов А. П., Иванов А. И., Малыгин А. Ю. [и др.]. Альбом из девяти классических статистических критериев для проверки гипотезы нормального или равномерного распределения данных малых выборок // Надежность и качество сложных систем. 2022. № 1. С. 20–29. doi:10.21685/2307-4205-2022-1-3

7. Иванов А. И., Банных А. Г., Безяев А. В. Искусственные молекулы, собранные из искусственных нейронов, воспроизводящих работу классических статистических критериев // Вестник Пермского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2020. № 1 (48). С. 26–32.

8. Pearson E. S. A further development of tests for normality // *Biometrika*. 1930. Vol. 22. P. 239–249.

9. Иванов А. И., Банных А. Г., Серикова Ю. И. Учет влияния корреляционных связей через их усреднение по модулю при нейросетевом обобщении статистических критериев для малых выборок. Надежность. 2020. № 20 (2). С. 28–34. URL: <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2020-20-2-28-34>

10. Geary R. C. The ratio of the mean deviation to the standard deviation as a test of normality // *Biometrika*. 1935. Vol. 27. P. 310–322.

11. Смирнов Н. В. О распределении $\rho\omega^2$ -критерия Мизеса // Математический сборник. 1937. Т. 2 (44), № 5. С. 973–993.

12. Neyman J. "Smooth" tests for goodness-of-fit // *Biometrika*. 1937. Vol. 20. P. 149–159.

13. Sherman B. A random variable related to the spacing of sample values // *The Annals of Mathematical Statistics*. 1950. Vol. 21, № 3. P. 339–361.
14. Renyi A. On the theory of order statistics // *Acta Mahtem. Acad. Scientiarum Hungarical*. 1953. Vol. 4. P. 191–232.
15. Anderson T. W., Darling D. A. A test for goodness-of-fit // *Journal of the American Statistical Association*. 1954. Vol. 49. P. 765–769.
16. Мандельброт Б., Хадсон З. Л. (НЕ)послушные рынки. Фрактальная революция в финансах. М. : СПб., Киев : Вильямс, 2006. 408 с.
17. David H. A., Hartley H. O., Pearson E. S. The distribution of the ration, in signal normal sample // *Biometrika*. 1954. Vol. 41. P. 482–493.
18. Watson G. S. Goodness-of-fit tests on a circle // *Biometrika*. 1961. Vol. 48. P. 109–114.
19. Shapiro S. S., Wilk M. V. An analysis of variance test for normality (complete samples) // *Biometrika*. 1965. Vol. 52, № 3. P. 591–611.
20. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М. : Наука, 1965.
21. Vasicek O. A test for normality based on sample entropy // *Journal of the Royal Statistical Society*. 1976. Vol. 38, № 1. P. 54–59.
22. Locke C., Spurrier J. D. The use of U-statistics for testing normality against nonsymmetric alternative // *Biometrika*. 1976. Vol. 64, № 3. P. 143–147.
23. Frozini B. V. A survey of class of goodness-of-fit statistics // *Metron*. 1978. Vol. 36, № 1-2. P. 3–49.
24. Murota K., Takeuchi K. The Studentized empirical characteristic function and its application to test for the shape of distribution // *Biometrika*. 1981. Vol. 68. P. 55–65.
25. Lawless J. F. *Statistical models and methods for life time data*. N.Y. : J. Welley, 1982.
26. Aly E.-E., Shayib M. A. On some goodness-of-fit tests for normal, logistic and extreme-value distributions // *Commun. Stat.-Theor. Meth*. 1992. Vol. 21, № 5. P. 1297–1308.

Литература к главе 2

27. Иванов А. И. Многомерная нейросетевая обработка биометрических данных с программным воспроизведением эффектов квантовой суперпозиции. Пенза : Изд-во АО «ПНИЭИ», 2016. 133 с. URL: <http://пниэи.рф/activity/science/BOOK16.pdf>
28. Иванов А. П., Иванов А. И., Безяев А. В. [и др.]. Обзор новых статистических критериев проверки гипотезы нормальности и равномерности распределения данных малых выборок // *Надежность и качество сложных систем*. 2022. № 2. С. 33–44.
29. Иванов А. И., Иванов А. П., Куприянов Е. Н. Интегрально-дифференциальное расширенное номенклатуры статистических критериев семейства Колмогорова-Смирнова для проверки гипотезы

нормального распределения данных малых выборок // Труды Международного симпозиума «Надежность и качество». 2022. Т. 1. С. 10–13.

30. Иванов А. И., Малыгин А. Ю., Полковникова С. А. Удвоение числа статистических критериев семейства Крамера – фон Мизеса дифференцированием малых выборок с нормальным и равномерным распределением биометрических данных // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2022. № 1. С. 53–61.

31. Перфилов К. А. Критерий среднего геометрического, используемый для проверки достоверности статистических гипотез распределения биометрических данных // Труды научно-технической конференции кластера пензенских предприятий, обеспечивающих БЕЗОПАСНОСТЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ. Т. 9. Пенза, 2014. С. 92–93.

32. Перфилов К. А., Иванов А. И., Проценко Е. Д. Расширение многообразия статистических критериев, используемых при проверке гипотез распределения значений биометрических данных // Европейский союз ученых. 2015. № 13, ч. 5. С. 9–12.

33. Иванов А. И., Перфилов К. А., Малыгина Е. А. Многомерный статистический анализ качества биометрических данных на предельно малых выборках с использованием критериев среднего геометрического, вычисленного для анализируемых функций вероятности // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2016. № 2 (16). С. 58–66.

34. Иванов А. И., Малыгин А. Ю., Полковникова С. А. Новый статистический критерий большой мощности, полученный дифференцированием случайных данных малой выборки // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2021. № 3. С. 67–74. doi:10.21685/2072-3059-2021-3-7

35. Иванов А. И. Искусственные математические молекулы: повышение точности статистических оценок на малых выборках (программы на языке MathCAD) : препринт. Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. 36 с.

36. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования : пер. с англ. М. : Техносфера, 2007. 320 с.

37. Безяев А. В. Биометрико-нейросетевая аутентификация: обнаружение и исправление ошибок в длинных кодах без накладных расходов на избыточность : препринт. Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. 40 с.

38. Иванов А. И. Одномерный аналог многомерной идентификации Ли – Щецена // Управляющие системы и машины. 1999. № 2. С. 16–21.

39. Иванов А. И. Быстрый синтез моделей нелинейных динамических систем с заданной погрешностью // Измерительная техника. 1995. № 10. С. 13–15.

40. Ivanov A. I. Two Methods of Hammersteine Orthogonal Model Identification with the Possibility of Convergence Defect Estimation // *Engineering Simulation*. 1999. Vol. 16. P. 553–560.
41. Иванов А. И. Нейросетевые технологии биометрической аутентификации пользователей открытых систем : автореф. дис. ... д-ра техн. наук по специальности 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработка информации». Пенза, 2002. 34 с.
42. Куприянов Е. Н. Оптимизация параметров полиномиального критерия Лежандра, ориентированного на проверку гипотезы равномерного распределения данных малых выборок // *Безопасность информационных технологий : сб. науч. ст. по материалам IV Всерос. науч.-техн. конф.* Пенза, 2022. С. 56–60.
43. Ли Ю., Щецен М. Определение ядер Винера – Хопфа методом взаимной корреляции // *Техническая кибернетика за рубежом*. М. : Машиностроение, 1968.
44. Billings S. A. Identification of nonlinear system (A survey) // *Proc. IEEE, part D*. 1980. Vol. 127, № 6. P. 272–285.
45. Иванов А. И. Синтез нелинейных динамических моделей Винера – Гаммерштейна перераспределением памяти между входом и выходом // *Автоматика и телемеханика*. 1997. № 11. С. 21–32.
46. Иванов А. И., Банных А. Г., Серикова Ю. И. Учет влияния корреляционных связей через их усреднение по модулю при нейросетевом обобщении статистических критериев для малых выборок // *Надежность*. 2020. № 20 (2). С. 28–34. URL: <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2020-20-2-28-34>
47. Волчихин В. И., Иванов А. И., Иванов А. П., Лукин В. С. Расширение номенклатуры семейства критериев среднего гармонического полиномами Эрмита при проверке гипотезы нормального распределения малых выборок биометрических данных // *Динамика систем, механизмов и машин*. 2021. Т. 9, № 4. doi: 10.25206/2310-9793-9-4-3-11
48. Иванов А. И., Иванов А. П., Куприянов Е. Н. Расширение семейства статистических критериев Крамера – фон Мизеса за счет использования полиномов Лагерра при проверке гипотезы нормальности малых выборок // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки*. 2021. № 3. С. 34–42.
49. Иванов А. И., Куприянов Е. Н. Синтез новых более мощных статистических критериев через мультипликативное объединение классических критериев Фроцинии, Мурота – Такеучи с критерием Херста для проверки гипотезы нормальности малых выборок // *Надежность*. 2022. № 1. С. 52–55. URL: <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-1-52-55>
50. Иванов А. И., Куприянов Е. Н. Защита искусственного интеллекта : ортогонализация статистико-нейросетевого анализа малых выборок биометрических данных : препринт. Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. 72 с.

51. Серикова Н. И. Линейное сглаживание гистограмм биометрических данных, искусственно увеличивающее число степеней свободы при оценивании статистических гипотез // Труды научно-технической конференции кластера пензенских предприятий, обеспечивающих БЕЗОПАСНОСТЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ. Пенза, 2014. Т. 9. С. 29–31.

52. Серикова Н. И., Иванов А. И., Качалин С. В. Биометрическая статистика: сглаживание гистограмм, построенных на малой обучающей выборке // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета. 2014. № 3 (55). С. 146–150.

53. Серикова Н. И., Иванов А. И., Серикова Ю. И. Оценка правдоподобия гипотезы о нормальном распределении по критерию джини для числа степеней свободы, кратного числу опытов // Вопросы радиоэлектроники. 2015. № 1 (1). С. 85–94.

54. Серикова Н. И., Иванов А. И., Серикова Ю. И. Оценка правдоподобия гипотезы о нормальном распределении по критерию Джини для сглаженных гистограмм, построенных на малых тестовых выборках // Вопросы радиоэлектроники. Сер.: СОИУ. 2015. Вып. 1. С. 85–94.

Литература к главы 3

55. Волчихин В. И., Иванов А. И., Фунтиков В. А., Малыгина Е. А. Перспективы использования искусственных нейронных сетей с многоуровневыми квантователями в технологии биометрико-нейросетевой аутентификации // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2013. № 4 (28). С. 88–99.

56. Малыгина Е. А. Биометрико-нейросетевая аутентификация: перспективы применения сетей квадратичных нейронов с многоуровневым квантованием биометрических данных : препринт. Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. 114 с.

57. Шалыгин А. С., Палагин Ю. И. Прикладные методы статистического моделирования. Л. : Машиностроение, 1986. 320 с.

58. Банных А. Г. Номограмма регуляризации вычисления энтропии длинных кодов, полученная через описание бета-распределения статистик расстояний Хэмминга // Безопасность информационных технологий : сб. науч. ст. по материалам I Всерос. науч.-техн. конф. (24 апреля, г. Пенза). Пенза : Изд-во ПГУ, 2019. С. 19–26.

59. Иванов А. И., Банных А. Г. Быстрая оценка энтропии длинных кодов с зависимыми разрядами на микроконтроллерах с малым потреблением и низкой разрядностью (обзор литературы по снижению размерности задачи) // Инженерные технологии и системы. 2020. Т. 30, № 2. С. 300–312. doi: 10.15507/2658-4123.030.2020.02.300.312

60. Ivanov A. I., Bannykh A. G., Lozhnikov P. S. [et al.]. Possibility of Decrease in a Level of Data Correlation During Processing Small

Samples Using Neural Networks by Generating New Statistic Tests // Journal of Physics: Conference Series, 2020. (1546 012080). doi:10.1088/1742-6596/1546/1/012080

61. Банных А. Г., Иванов А. И., Иванов А. П., Пирогов А. А. Программа для ЭВМ «Калькулятор для вычисления энтропии кодов 256 бит на малых выборках», номер свидетельства регистрации RU 20201614767, дата регистрации 30.03.2021, правообладатель ФБГОУ ВО «Пензенский государственный университет».

62. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М. : Институт компьютерных исследований, 2002. С. 656.

63. Мандельброт Б., Хадсон З. Л. (НЕ)послушные рынки. Фрактальная революция в финансах. М. ; СПб. ; Киев : Вильямс, 2006. 408 с.

64. Гильмутдинов А. Х. Фракталы и дробные операторы. Казань : Изд-во Фэн Академии наук РТ, 2010. 488 с.

65. Николлс Дж., Мартин Р., Валлас Б., Фуке П. От нейрона к мозгу / пер. с англ. П. М. Балабана, А. В. Галкина, Р. А. Гиниатуллина, Р. Н. Хазипова, Л. С. Хируга. М. : Едиториал УРСС, 2003. 672 с

Литература к главе 4

66. Juels A., Wattenberg M. A Fuzzy Commitment Scheme // Proc. ACM Conf. Computer and Communications Security. Singapore, 1999. P. 28–36.

67. Monroe F., Reiter M., Li Q., Wetzel S. Cryptographic key generation from voice // In Proc. IEEE Symp. on Security and Privacy. Oakland, CA, USA, 2001. P. 202–213.

68. Dodis Y., Reyzin L., A. Smith Fuzzy Extractors: How to Generate Strong Keys from Biometrics and Other Noisy // In EUROCRYPT. 2004. P. 523–540.

69. Ramírez-Ruiz J., Pfeiffer C., Nolasco-Flores J. Cryptographic Keys Generation Using FingerCodes //Advances in Artificial Intelligence – IBERAMIA-SBIA 2006 (LNCS 4140). 2006. P. 178–187.

70. Hao Feng, Anderson R. and Daugman J. Crypto with Biometrics Effectively // IEEE TRANSACTIONS ON COMPUTERS. 2006. Vol. 55, № 9.

71. Чмора А. Л. Маскировка ключа с помощью биометрии // Проблемы передачи информации. 2011. № 2 (47). С. 128–143.

72. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования / пер. с англ. М. : Техносфера, 2007. 320 с.

73. Иванов А. И., Захаров О. С. Среда моделирования «БиоНейроАвтограф». URL: <http://пниэи.рф/activity/science/noc/bioneuro-autograph.zip>

74. Иванов А. И. Исследование свойств нейросетевого преобразователя биометрия-код с использованием среды моделирования «БиоНейроАвтограф» : учеб.-метод. пособие. Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. 40 с. URL: <https://tsib.pnzgu.ru/page/39329>

75. Иванов А. И. Среда моделирования «БиоНейроАвтограф»: учеб.-метод. пособие. Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. 60 с. URL: <https://tsib.pnzgu.ru/page/39329>

76. Иванов А. И. Тестирование нейронных сетей, обученных алгоритмом ГОСТ Р 52633.5–2022, в среде моделирования «БиоНейро-Автограф» : учеб.-метод. пособие. Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. 36 с. URL: <https://tsib.pnzgu.ru/page/39329>

77. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект. Современный подход. М. ; СПб. ; Киев, 2006. 1407 с.

78. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. М. : Вильямс, 2006. С. 1104.

79. Николенко С., Кудрин А., Архангельская Е. Глубокое обучение. Погружение в мир нейронных сетей. СПб. : Питер, 2018.

80. Аггарвал Чару. Нейронные сети и глубокое обучение. СПб. : Диалектика. 2020. 756 с.

81. Галушкин А. И. Синтез многослойных систем распознавания образов. М. : Энергия, 1974.

Учебное издание

Иванов Александр Иванович

**Нейросетевой многокритериальный
статистический анализ малых выборок**

Редактор *В. В. Чувашова*
Технический редактор *Н. В. Иванова*
Компьютерная верстка *Н. В. Ивановой*
Дизайн обложки *И. В. Шваревой*

Подписано в печать 14.11.2022.
Формат 70×100¹/₁₆. Усл. печ. л. 13,00.
Тираж 160. Заказ № 607.

Издательство ПГУ
440026, г. Пенза, ул. Красная, 40.
Тел.: (8412) 66-60-49, 66-67-77; e-mail: iic@pnzgu.ru